Fachrichtung Mathematik
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Michael Bildhauer
Selina Schwindling

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Lösungen
Tag 7, Thema 2
Folgen und Mengen im $\mathbb{R}^n$
Blokkurs 2020
Höhere Mathematik für (Naturwiss. und) Ingenieure I

Aufgabe 1.

i) $\underline{\Rightarrow}$: Es konvergiere $\{\underline{\mathbf{x}}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ gegen $\underline{\mathbf{x}}$ und es sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\|\underline{\mathbf{x}}^{(k)} - \underline{\mathbf{x}}\| < \varepsilon$$

für alle $k \geq N$. Es gilt also für jedes $i \in \{1,\dots,n\}$ (wegen der Monotonie der Wurzelfunktion)

$$\begin{aligned}|x_i^{(k)} - x_i| &= \sqrt{(x_i^{(k)} - x_i)^2}\\ &\leq \sqrt{(x_1^{(k)} - x_1)^2 + \cdots + (x_n^{(k)} - x_n)^2}\\ &= \|\underline{\mathbf{x}}^{(k)} - \underline{\mathbf{x}}\|\\ &< \varepsilon\end{aligned}$$

für alle $k \geq N$, d.h.

$$\lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i.$$

$\underline{\Leftarrow}$: Es seien

$$\lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i$$

für alle $i \in \{1,\dots,n\}$ und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es zu jedem $i \in \{1,\dots,n\}$ ein N_i mit

$$|x_i^{(k)} - x_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$$

für alle $k \geq N_i$. Es folgt

$$\|\underline{\mathbf{x}}^{(k)} - \underline{\mathbf{x}}\| = \left(\sum_{i=1}^n (x_i^{(k)} - x_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} < \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \varepsilon$$

für alle $k \geq N := \max(N_1,\dots,N_n)$, d.h.

$$\lim_{k\to\infty} \underline{\mathbf{x}}^{(k)} = \underline{\mathbf{x}}.$$

ii) Zunächst zeigen wir die umgekehrte Dreiecksungleichung

$$\big|\|\underline{\mathbf{x}}\| - \|\underline{\mathbf{y}}\|\big| \leq \|\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{y}}\|$$

für alle $\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^n$. Hierzu bemerken wir, dass

$$\|\underline{\mathbf{x}}\| = \|\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{y}} + \underline{\mathbf{y}}\| \leq \|\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{y}}\| + \|\underline{\mathbf{y}}\|$$

und

$$\|\underline{\mathbf{y}}\| = \|\underline{\mathbf{y}} - \underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{x}}\| \leq \|\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{y}}\| + \|\underline{\mathbf{x}}\|$$

sodass

$$-\|\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{y}}\| \leq \|\underline{\mathbf{x}}\| - \|\underline{\mathbf{y}}\| \leq \|\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{y}}\|,$$

also

$$\big|\|\underline{\mathbf{x}}\| - \|\underline{\mathbf{y}}\|\big| \leq \|\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{y}}\|.$$

Nun konvergiere die Folge $\{\underline{\mathbf{x}}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ gegen $\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ und es sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\|\underline{\mathbf{x}}^{(k)} - \underline{\mathbf{x}}\| < \varepsilon$$

für alle $k \geq N$. Mit der umgekehrten Dreiecksungleichung für Normen folgt

$$\big|\|\underline{\mathbf{x}}^{(k)}\| - \|\underline{\mathbf{x}}\|\big| \leq \|\underline{\mathbf{x}}^{(k)} - \underline{\mathbf{x}}\| < \varepsilon$$

für alle $k \geq N$, d.h. $\{\|\underline{\mathbf{x}}^{(k)}\|\}_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine konvergente reelle Zahlenfolge (mit Grenzwert $\|\underline{\mathbf{x}}\|$).

Die Umkehrung gilt nicht. Betrachte hierzu in $\mathbb{R}^2$ die Folge $\{\underline{\mathbf{x}}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$\underline{\mathbf{x}}^{(k)} = \begin{pmatrix} \sin(k) \\ \cos(k) \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt $\|\underline{\mathbf{x}}^{(k)}\| = \sqrt{\sin^2(k) + \cos^2(k)} = 1$, sodass $\{\|\underline{\mathbf{x}}^{(k)}\|\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine konstante und damit konvergente reelle Zahlenfolge ist. Die Folge $\{\underline{\mathbf{x}}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ selbst ist nach Satz 10.3 allerdings divergent.

Aufgabe 2.

i)

- Es sei $\underline{\mathbf{x}} \in U_1 \cap U_2$. Es gilt also $\underline{\mathbf{x}} \in U_1$ und $\underline{\mathbf{x}} \in U_2$ und da U_1 und U_2 offen sind, gibt es $\varepsilon_1 > 0$ und $\varepsilon_2 > 0$ mit $B_{\varepsilon_1}(\underline{\mathbf{x}}) \subset U_1$ und $B_{\varepsilon_2}(\underline{\mathbf{x}}) \subset U_2$. Für $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ gilt also $B_\varepsilon(\underline{\mathbf{x}}) \subset B_{\varepsilon_1}(\underline{\mathbf{x}}) \subset U_1$ und $B_\varepsilon(\underline{\mathbf{x}}) \subset B_{\varepsilon_2}(\underline{\mathbf{x}}) \subset U_2$, sodass $B_\varepsilon(\underline{\mathbf{x}}) \subset U_1 \cap U_2$. Also ist $\underline{\mathbf{x}}$ innerer Punkt von $U_1 \cap U_2$ und damit ist $U_1 \cap U_2$ offen.
- Es sei $\underline{\mathbf{x}} \in U_1 \cup U_2$. Es gilt also $\underline{\mathbf{x}} \in U_1$ oder $\underline{\mathbf{x}} \in U_2$ und wir nehmen ohne Einschränkung an, dass $\underline{\mathbf{x}} \in U_1$. Da U_1 offen ist, gibt es $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(\underline{\mathbf{x}}) \subset U_1 \subset U_1 \cup U_2$. Also ist $\underline{\mathbf{x}}$ innerer Punkt von $U_1 \cup U_2$ und damit ist $U_1 \cup U_2$ offen.

ii) Es seien A_1 und A_2 abgeschlossen, d.h. $\mathbb{R}^n - A_1$ und $\mathbb{R}^n - A_2$ seien offen. Nach den de Morganschen Regeln gilt

$$\mathbb{R}^n - (A_1 \cap A_2) = (\mathbb{R}^n - A_1) \cup (\mathbb{R}^n - A_2)$$

und

$$\mathbb{R}^n - (A_1 \cup A_2) = (\mathbb{R}^n - A_1) \cap (\mathbb{R}^n - A_2)$$

und als Vereinigung bzw. Schnitt offener Mengen sind $\mathbb{R}^n - (A_1 \cap A_2)$ und $\mathbb{R}^n - (A_1 \cup A_2)$ nach Teil *i)* offen, d.h. $A_1 \cap A_2$ und $A_1 \cup A_2$ sind abgeschlossen.

iii) Definiere $A_k = [-1+\frac{1}{k}, 1-\frac{1}{k}]$ für $k \in \mathbb{N}$. Dann ist A_k abgeschlossen mit $A_k \subset (-1,1)$ für alle $k \in \mathbb{N}$, sodass $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \subset (-1,1)$. Für $x \in (-1,1)$ gilt außerdem $-1 < x < 1$, also $x+1 > 0$ und $1-x > 0$. Nach der Archimedischen Eigenschaft gibt es $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{k_1} < x+1$ und $\frac{1}{k_2} < 1-x$, also $-1+\frac{1}{k_1} < x < 1-\frac{1}{k_2}$. Für $k = \max(k_1,k_2)$ folgt daraus $-1+\frac{1}{k} < x < 1-\frac{1}{k}$, d.h. $x \in A_k$. Es folgt $(-1,1) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ sodass insgesamt $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = (-1,1)$ und $(-1,1)$ ist offen.

Aufgabe 3.

i) Da U und V beschränkt sind gibt es $M_1, M_2 \geq 0$ mit $\|\underline{\mathbf{u}}\| \leq M_1$ für alle $\underline{\mathbf{u}} \in U$ und $\|\underline{\mathbf{v}}\| \leq M_2$ für alle $\underline{\mathbf{v}} \in V$. Definiere $M := \max(M_1, M_2)$. Dann gilt $\|\underline{\mathbf{x}}\| \leq M$ für alle $U \cup V$, sodass $U \cup V$ beschränkt ist.

ii) Nach den De Morganschen Regeln gilt

$$\begin{aligned}
\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n - (A-U) \quad &\Rightarrow \quad \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n \quad \wedge \quad \underline{\mathbf{x}} \notin A - U \\
&\Rightarrow \quad \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n \quad \wedge \quad (\underline{\mathbf{x}} \notin A \quad \vee \quad \underline{\mathbf{x}} \in U) \\
&\Rightarrow \quad \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n - A \quad \vee \quad \underline{\mathbf{x}} \in U,
\end{aligned}$$

sodass $\mathbb{R}^n - (A-U) = (\mathbb{R}^n - A) \cup U$ als Vereinigung zweier offener Mengen nach Satz 10.4 offen ist. Also ist $A - U$ abgeschlossen.

Aufgabe 4.

i) Die Menge A enthält als Teilmenge die unbeschränkte Menge

$$\tilde{A} = \big\{(n,0) \in \mathbb{R}^2 \colon n \in \mathbb{N}\big\}$$

und ist somit selbst unbeschränkt und daher nicht kompakt.

ii) Jede Folge mit Werten in B ist konvergent mit Grenzwert $(0,0) \in B$, sodass B folgenkompakt und damit nach Satz 10.5 auch kompakt ist.

iii) Für alle $\theta \in (0, 2\pi]$ gilt

$$\big\|\big(\sqrt{n}\cos(n\theta), \sqrt{n}\sin(n\theta)\big)\big\| = \sqrt{n}\sqrt{\cos^2(n\theta) + \sin^2(n\theta)} = \sqrt{n} \to \infty$$

für $n \to \infty$, sodass die Menge C unbeschränkt und daher nicht kompakt ist.

Aufgabe 5.

i) Da $A = B_1(\underline{\mathbf{0}})$ die Einheitskugel in $\mathbb{R}^3$ ist, ist sie laut Vorlesung (siehe Seite 219) offen.

Wir zeigen, dass $\mathbb{R}^3 - A$ nicht offen ist, denn dann ist A nach Definition 10.11 nicht abgeschlossen und damit nicht kompakt. Es gilt $(1, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 - A$, aber für jedes $\varepsilon \in (0, 1)$ gilt $(1 - \frac{\varepsilon}{2}, 0, 0) \in B_\varepsilon((1, 0, 0))$ und $(1 - \frac{\varepsilon}{2}, 0, 0) \in B_1(\underline{\mathbf{0}})$. Also gibt es kein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon((1, 0, 0)) \subset \mathbb{R}^3 - A$, d.h. $\mathbb{R}^3 - A$ ist nicht offen.

ii) Die Menge B ist nicht offen, denn es gilt $\underline{\mathbf{0}} \in B$ aber für $\varepsilon > 0$ gilt $(-\frac{\varepsilon}{2}, 0) \in \mathbb{R}^2 - B$ und $(-\frac{\varepsilon}{2}, 0) \in B_\varepsilon(\underline{\mathbf{0}})$.

Außerdem gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}^2 - B &= \big\{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 \colon x_2 \neq 0 \quad \vee \quad x_1 \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)\big\} \\
&= \big\{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 \colon x_2 \neq 0\big\} \cup \big(((-\infty, 0) \cup (1, \infty)) \times \mathbb{R}\big) \\
&= (\mathbb{R} \times (0, \infty)) \cup (\mathbb{R} \times (-\infty, 0)) \cup ((-\infty, 0) \times \mathbb{R}) \cup ((1, \infty) \times \mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Also ist $\mathbb{R}^2 - B$ nach Satz 10.4 als endliche Vereinigung offener Mengen offen. Somit ist B abgeschlossen.

Aufgabe 6.

- Die Menge A enthält als Teilmenge die unbeschränkte Menge

$$\tilde{A} = \big\{(n, 0) \in \mathbb{R}^2 \colon n \in \mathbb{N}\big\}$$

und ist somit selbst unbeschränkt.

Die Menge A ist nicht offen, denn es gilt $\underline{\mathbf{0}} \in A$ aber für $\varepsilon > 0$ gilt $(-\frac{\varepsilon}{2}, 0) \in \mathbb{R}^2 - A$ und $(-\frac{\varepsilon}{2}, 0) \in B_\varepsilon(\underline{\mathbf{0}})$.

Es ist

$$\mathbb{R}^n - A = \underbrace{\big\{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 \colon x_2 < 0\big\}}_{=:\, A_1} \cup \underbrace{\big\{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 \colon x_2 > x_1\big\}}_{=:\, A_2}$$

nach Satz 10.4 als Vereinigung zweier offener Mengen offen (für $\underline{\mathbf{x}} \in A_1$ ist $B_{|x_2|/2}(\underline{\mathbf{x}}) \subset A_1$ und für $\underline{\mathbf{x}} \in A_2$ ist $B_{(x_2 - x_1)/2\sqrt{2}}(\underline{\mathbf{x}}) \subset A_2$), sodass A abgeschlossen ist.

Da A nicht beschränkt ist, ist A auch nicht kompakt.

- Wir zeigen zuerst, dass $\partial B_1(\underline{\mathbf{0}}) = \big\{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 \colon \|\underline{\mathbf{x}}\| = 1\big\}$.

Hierzu seien zunächst $\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2$ mit $\|\underline{\mathbf{x}}\| = 1$ und $\varepsilon > 0$. Dann liegt einer der vier Punkte $(x_1 + \frac{\varepsilon}{2}, x_2 + \frac{\varepsilon}{2})$, $(x_1 - \frac{\varepsilon}{2}, x_2 + \frac{\varepsilon}{2})$, $(x_1 + \frac{\varepsilon}{2}, x_2 - \frac{\varepsilon}{2})$, $(x_1 - \frac{\varepsilon}{2}, x_2 - \frac{\varepsilon}{2})$ innerhalb von $B_1(\underline{\mathbf{0}})$ und einer außerhalb von $B_1(\underline{\mathbf{0}})$ (je nach dem in welchem Quadranten $\underline{\mathbf{x}}$ liegt). Also ist $\underline{\mathbf{x}} \in \partial B_1(\underline{\mathbf{0}})$.

Ist umgekehrt $\underline{\mathbf{x}} \in \partial B_1(\underline{\mathbf{0}})$ so gibt es zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $\underline{\mathbf{y}}^{(k)} \in B_{1/k}(\underline{\mathbf{x}})$ mit $\underline{\mathbf{y}}^{(k)} \notin B_1(\underline{\mathbf{0}})$ und ein $\underline{\mathbf{z}}^{(k)} \in B_{1/k}(\underline{\mathbf{x}})$ mit $\underline{\mathbf{z}}^{(k)} \in B_1(\underline{\mathbf{0}})$. Die so erhaltenen Folgen $\{\underline{\mathbf{y}}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ und $\{\underline{\mathbf{z}}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ konvergieren per Konstruktion gegen $\underline{\mathbf{x}}$, sodass die reellen Zahlenfolgen $\{\|\underline{\mathbf{y}}^{(k)}\|\}_{k\in\mathbb{N}}$ und $\{\|\underline{\mathbf{z}}^{(k)}\|\}_{k\in\mathbb{N}}$ gegen $\|\underline{\mathbf{x}}\|$ konvergieren (siehe Präsenzübungsblatt 20, Aufgabe 2). Wegen $\|\underline{\mathbf{y}}^{(k)}\| \geq 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$ folgt $\|\underline{\mathbf{x}}\| \geq 1$ und wegen $\|\underline{\mathbf{z}}^{(k)}\| \leq 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$ folgt $\|\underline{\mathbf{x}}\| \leq 1$, sodass insgesamt $\|\underline{\mathbf{x}}\| = 1$.

Damit folgt $B = \overline{B_1(\underline{\mathbf{0}})} = B_1(\underline{\mathbf{0}}) \cup \partial B_1(\underline{\mathbf{0}})$. Damit ist B beschränkt, nicht offen, abgeschlossen und kompakt.

- Wegen $A \cap B \subset B$ und weil B beschränkt ist folgt, dass $A \cap B$ beschränkt ist.

  Die Menge $A \cap B$ ist nicht offen, denn es gilt $\underline{\mathbf{0}} \in A \cap B$ aber für $\varepsilon > 0$ gilt $(-\frac{\varepsilon}{2}, 0) \in \mathbb{R}^2 - (A \cap B)$ und $(-\frac{\varepsilon}{2}, 0) \in B_\varepsilon(\underline{\mathbf{0}})$.

  Als Schnitt zweier abgeschlossener Mengen ist $A \cap B$ nach Satz 10.4 abgeschlossen.

  Da $A \cap B$ beschränkt und abgeschlossen ist, ist sie definitionsgemäß kompakt.

- Wegen $A \subset A \cup B$ und weil A unbeschränkt ist folgt, dass $A \cup B$ unbeschränkt ist.

  Die Menge $A \cup B$ ist nicht offen, denn es gilt $(0, 1) \in A \cup B$ aber für $\varepsilon > 0$ gilt $(0, 1 + \frac{\varepsilon}{2}) \in \mathbb{R}^2 - (A \cup B)$ und $(0, 1 + \frac{\varepsilon}{2}) \in B_\varepsilon((0, 1))$.

  Als Vereinigung zweier abgeschlossener Mengen ist $A \cup B$ nach Satz 10.4 abgeschlossen.

  Da $A \cup B$ nicht beschränkt ist, ist $A \cup B$ auch nicht kompakt.

- Die Menge $A - B$ enthält als Teilmenge die unbeschränkte Menge

  $$\tilde{B} = \{(n, 0) \in \mathbb{R}^2 \colon n \in \mathbb{N} - \{1\}\}$$

  und ist somit selbst unbeschränkt.

  Die Menge $A - B$ ist nicht offen, denn es gilt $(2, 2) \in A - B$ aber für $\varepsilon > 0$ gilt $(2 - \frac{\varepsilon}{2}, 2 + \frac{\varepsilon}{2}) \in \mathbb{R}^2 - (A - B)$ und $(2 - \frac{\varepsilon}{2}, 2 + \frac{\varepsilon}{2}) \in B_\varepsilon((2, 2))$.

  Die Menge $\mathbb{R}^2 - (A - B) = (\mathbb{R}^2 - A) \cup B$ ist nicht offen, denn es gilt $(1, 0) \in (\mathbb{R}^2 - A) \cup B$ aber für $\varepsilon > 0$ gilt $(1 + \frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}) \in \mathbb{R}^2 - ((\mathbb{R}^2 - A) \cup B) = A - B$ und $(1 + \frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}) \in B_\varepsilon((1, 0))$. Daraus folgt dass die Menge $A - B$ nicht abgeschlossen ist.

  Da $A - B$ nicht beschränkt ist, ist $A - B$ auch nicht kompakt.

- Es ist $\partial A = \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 \colon x_2 = 0\} \cup \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 \colon x_2 = x_1, x_2 > 0\}$.

  Die Menge ∂A enthält als Teilmenge die unbeschränkte Menge $\tilde{A}$ (siehe oben) und ist somit selbst unbeschränkt.

  Definitionsgemäß ist ein Randpunkt kein innerer Punkt einer Menge, sodass ∂A nicht offen ist.

  Es ist (mit A_1 und A_2 wie oben)

  $$\mathbb{R}^n - \partial A = A_1 \cup A_2 \cup \underbrace{\{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 \colon 0 < x_2 < x_1\}}_{=: A_3}$$

  nach Satz 10.4 als Vereinigung dreier offener Mengen offen (für $\underline{\mathbf{x}} \in A_3$ und $\varepsilon = \min(\frac{x_2}{2}, \frac{x_1 - x_2}{2\sqrt{2}})$ ist $B_\varepsilon(\underline{\mathbf{x}}) \subset A_3$), sodass ∂A abgeschlossen ist.

  Da ∂A nicht beschränkt ist, ist ∂A auch nicht kompakt.

Aufgabe 7. Die Menge U ist nicht offen, denn es gilt $(0,1) \in U$ aber für $\varepsilon > 0$ ist $(0, 1+\frac{\varepsilon}{2}) \in \mathbb{R}^2 - U$ und $(0, 1+\frac{\varepsilon}{2}) \in B_\varepsilon((0,1))$.

Die Menge $\mathbb{R}^2 - U$ ist nicht offen, denn es gilt $\underline{\mathbf{0}} \in \mathbb{R}^2 - U$ aber für $\varepsilon > 0$ gilt $(0, \frac{\varepsilon}{2}) \in \mathbb{R}^2 - (\mathbb{R}^2 - U) = U$ und $(0, \frac{\varepsilon}{2}) \in B_\varepsilon(\underline{\mathbf{0}})$. Daraus folgt, dass die Menge U nicht abgeschlossen ist.

Da die Menge U nicht abgeschlossen ist, ist sie auch nicht kompakt.

Aufgabe 8.

- Für alle $\underline{\mathbf{x}} \in A$ gilt
$$\|\underline{\mathbf{x}}\|^2 = x_1^2 + x_2^2 = 4\Big(\frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2^2}{4}\Big) \le 4\Big(\frac{x_1^2}{4} + x_2^2\Big) \le 8,$$
sodass A beschränkt ist.

  Die Menge A ist nicht offen, denn es gilt $(0,1) \in A$ aber für $\varepsilon > 0$ gilt $(0, 1-\frac{\varepsilon}{2}) \in \mathbb{R}^2 - A$ und $(0, 1-\frac{\varepsilon}{2}) \in B_\varepsilon((0,1))$.

  Es ist
$$\mathbb{R}^n - A = \underbrace{\Big\{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 \colon \frac{x_1^2}{4} + x_2^2 < 1\Big\}}_{=:\, A_1} \cup \underbrace{\Big\{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 \colon \frac{x_1^2}{4} + x_2^2 > 2\Big\}}_{=:\, A_2}.$$
Wir zeigen nun, dass A_1 offen ist. Es sei also $\underline{\mathbf{x}} \in A_1$, d.h.
$$\frac{x_1^2}{4} + x_2^2 < 1.$$
Daraus folgt $x_1 \in (-2,2)$ und $x_2 \in (-1,1)$ und außerdem gibt es $\varepsilon \in (0,1]$ mit
$$\frac{x_1^2}{4} + x_2^2 = 1 - \varepsilon.$$
Wir suchen nun $r > 0$ so, dass
$$\frac{y_1^2}{4} + y_2^2 < 1$$
für alle $\underline{\mathbf{y}} \in B_r(\underline{\mathbf{x}})$. Dazu schreiben wir $\underline{\mathbf{y}} = \underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{z}}$ für $\|\underline{\mathbf{z}}\| < r$. Dann gilt
$$\begin{aligned}\frac{y_1^2}{4} + y_2^2 &= \frac{(x_1+z_1)^2}{4} + (x_2+z_2)^2 \\ &= \underbrace{\frac{x_1^2}{4} + x_2^2}_{=1-\varepsilon} + \underbrace{\frac{z_1^2}{4} + z_2^2}_{<r^2} + \underbrace{\frac{1}{2}x_1 z_1}_{<r} + \underbrace{2x_2 z_2}_{<2r} \\ &< 1 - \varepsilon + r^2 + 3r\end{aligned}$$
und damit
$$r^2 + 3r < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \frac{y_1^2}{4} + y_2^2 < 1.$$

Wählen wir also $r \in (0, \frac{\sqrt{4\varepsilon+9}-3}{2})$, so folgt $B_r(\underline{\mathbf{x}}) \subset A_1$, sodass A_1 offen ist. Analog zeigt man, dass A_2 offen ist und insgesamt ist $\in \mathbb{R}^2 - A$ nach Satz 10.4 als Vereinigung zweier offener Mengen offen, sodass A abgeschlossen ist.

Da die Menge A beschränkt und abgeschlossen ist, ist sie definitionsgemäß kompakt.

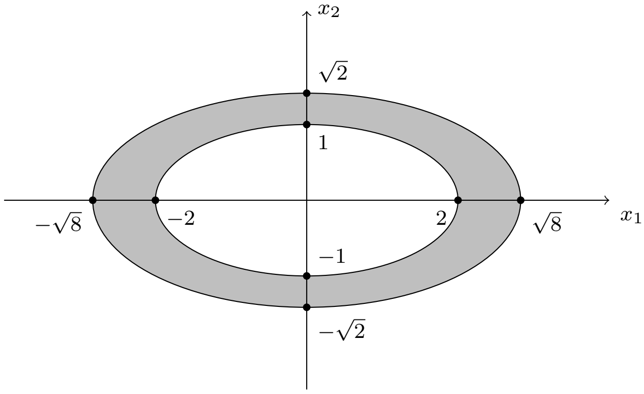

Abbildung 1: A

- Die Menge B enthält als Teilmenge die unbeschränkte Menge

$$\tilde{B} = \left\{(0, n) \in \mathbb{R}^2 \colon n \in \mathbb{N}\right\}$$

und ist somit selbst unbeschränkt.

Für $\underline{\mathbf{x}} \in B$ ist $B_{(x_2 - x_1)/2\sqrt{2}} \subset B$, sodass B offen ist.

Die Menge $\mathbb{R}^2 - B = \left\{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 \colon x_2 \leq x_1\right\}$ ist nicht offen, denn es gilt $\underline{\mathbf{0}} \in \mathbb{R}^2 - B$ aber für $\varepsilon > 0$ gilt $(0, \frac{\varepsilon}{2}) \in \mathbb{R}^2 - (\mathbb{R}^2 - B) = B$ und $(0, \frac{\varepsilon}{2}) \in B_\varepsilon(\underline{\mathbf{0}})$. Daraus folgt, dass die Menge B nicht abgeschlossen ist.

Da B nicht beschränkt ist, ist B auch nicht kompakt.

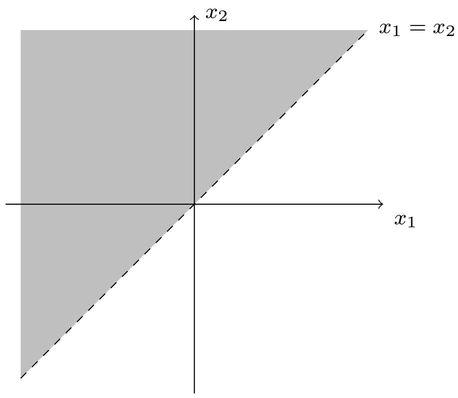

Abbildung 2: B

- Wegen $A \cap B \subset A$ und weil A beschränkt ist folgt, dass $A \cap B$ beschränkt ist.

  Die Menge $A \cap B$ ist nicht offen, denn es gilt $(0,1) \in A \cap B$ aber für $\varepsilon > 0$ gilt $(0, 1 - \frac{\varepsilon}{2}) \in \mathbb{R}^2 - (A \cap B)$ und $(0, 1 - \frac{\varepsilon}{2}) \in B_\varepsilon((0,1))$.

  Die Menge $\mathbb{R}^2 - (A \cap B)$ ist nicht offen, denn es gilt $(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}) \in \mathbb{R}^2 - (A \cap B)$ aber für $\varepsilon > 0$ (hinreichend klein) gilt $(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{\varepsilon}{2}) \in \mathbb{R}^2 - (\mathbb{R}^2 - (A \cap B)) = A \cap B$ und $(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{\varepsilon}{2}) \in B_\varepsilon((\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}))$. Daraus folgt, dass die Menge $A \cap B$ nicht abgeschlossen ist.

  Da $A \cap B$ nicht abgeschlossen ist, ist $A \cap B$ auch nicht kompakt.

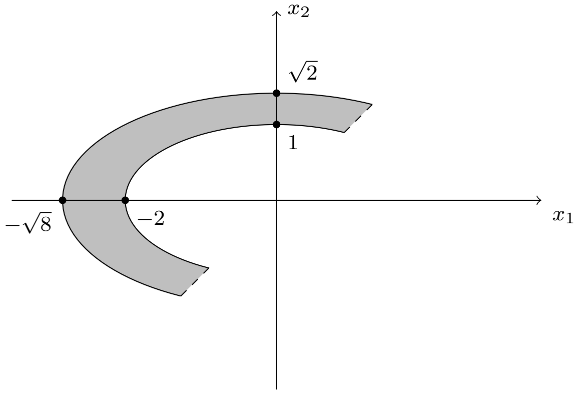

Abbildung 3: $A \cap B$

- Wegen $B \subset A \cup B$ und weil B unbeschränkt ist folgt, dass $A \cup B$ unbeschränkt ist.

  Die Menge $A \cup B$ ist nicht offen, denn es gilt $(0,-1) \in A \cup B$ aber für $\varepsilon > 0$ (hinreichend klein) gilt $(0, -1 + \frac{\varepsilon}{2}) \in \mathbb{R}^2 - (A \cup B)$ und $(0, -1 + \frac{\varepsilon}{2}) \in B_\varepsilon((0,-1))$.

  Die Menge $\mathbb{R}^2 - (A \cup B)$ ist nicht offen, denn es gilt $\underline{\mathbf{0}} \in \mathbb{R}^2 - (A \cup B)$ aber für $\varepsilon > 0$ gilt $(-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}) \in \mathbb{R}^2 - (\mathbb{R}^2 - (A \cup B)) = A \cup B$ und $(-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}) \in B_\varepsilon(\underline{\mathbf{0}})$. Daraus folgt, dass die Menge $A \cup B$ nicht abgeschlossen ist.

  Da $A \cup B$ nicht beschränkt ist, ist $A \cup B$ auch nicht kompakt.

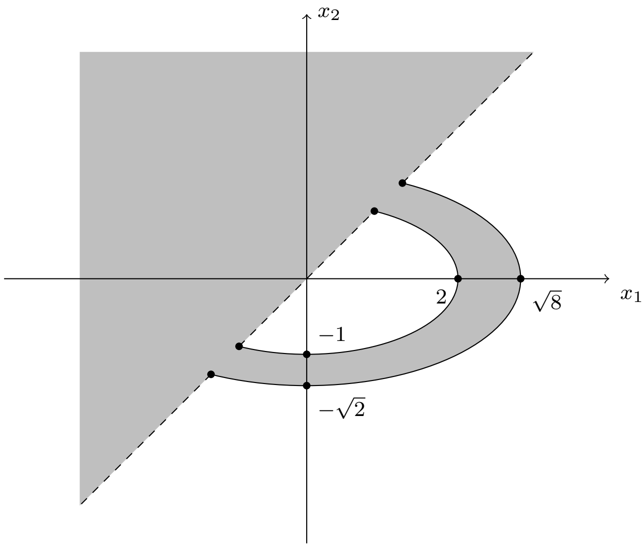

Abbildung 4: $A \cup B$

- Die Menge $B - A$ enthält als Teilmenge die unbeschränkte Menge

$$\hat{B} = \big\{(0, n) \in \mathbb{R}^2 \colon n \in \mathbb{N} - \{1\}\big\}$$

und ist somit selbst unbeschränkt.

Wir zeigen dass $B - A$ offen ist. Es sei $\underline{\mathbf{x}} \in B - A \subset B$. Da B offen ist, gibt es $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(\underline{\mathbf{x}}) \subset B$. Falls $B_\varepsilon(\underline{\mathbf{x}}) \cap A = \emptyset$, so gilt $B_\varepsilon(\underline{\mathbf{x}}) \subset B - A$. Andernfalls, da $\underline{\mathbf{x}} \neq \underline{\mathbf{a}}$ für alle $\underline{\mathbf{a}} \in A$ gilt und die Menge A als abgeschlossene Menge alle ihre Randpunkte enthält, ist

$$\varepsilon > \inf\{\|\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{a}}\| \colon \underline{\mathbf{a}} \in A\} > 0$$

(nur falls $\underline{\mathbf{x}}$ Randpunkt von A ist, ist dieses Infimum 0). Für

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{1}{2} \inf\{\|\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{a}}\| \colon \underline{\mathbf{a}} \in A\} > 0$$

gilt dann $B_{\tilde{\varepsilon}}(\underline{\mathbf{x}}) \subset B_\varepsilon(\underline{\mathbf{x}}) \subset B$ und $B_{\tilde{\varepsilon}}(\underline{\mathbf{x}}) \cap A = \emptyset$, also $B_{\tilde{\varepsilon}}(\underline{\mathbf{x}}) \subset B - A$. In jedem Fall ist also $\underline{\mathbf{x}}$ innerer Punkt von $B - A$ und damit ist $B - A$ offen.

Die Menge $\mathbb{R}^2 - (B - A) = (\mathbb{R}^2 - B) \cup A$ ist nicht offen, denn es gilt $(-\sqrt{8}, 0) \in (\mathbb{R}^2 - B) \cup A$ aber für $\varepsilon > 0$ gilt $(-\sqrt{8} - \frac{\varepsilon}{2}, 0) \in \mathbb{R}^2 - ((\mathbb{R}^2 - B) \cup A) = B - A$ und $(-\sqrt{8} - \frac{\varepsilon}{2}, 0) \in B_\varepsilon((-\sqrt{8}, 0))$. Daraus folgt dass die Menge $B - A$ nicht abgeschlossen ist.

Da $B - A$ nicht beschränkt ist, ist $B - A$ auch nicht kompakt.

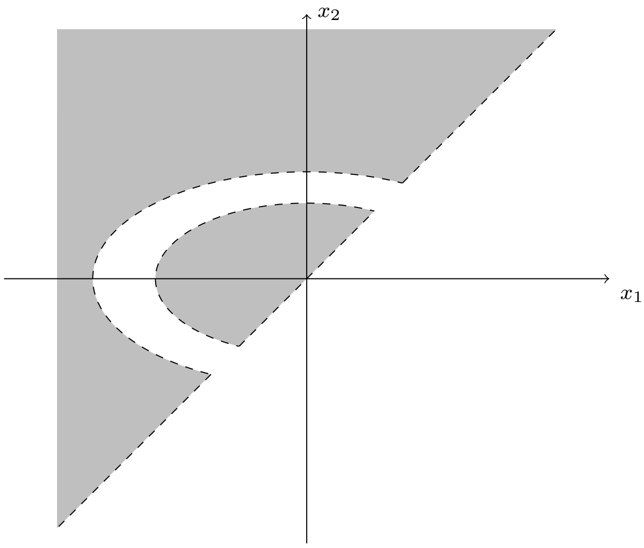

Abbildung 5: $B - A$

- Es ist
$$\partial A = \left\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 \colon \frac{x_1^2}{4} + x_2^2 = 1 \right\} \cup \left\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 \colon \frac{x_1^2}{4} + x_2^2 = 2 \right\}.$$

  Wegen $\partial A \subset A$ und weil A beschränkt ist folgt, dass ∂A beschränkt ist.

  Definitionsgemäß ist ein Randpunkt kein innerer Punkt einer Menge, sodass ∂A nicht offen ist.

  Es ist (mit A_1 und A_2 wie oben)
$$\mathbb{R}^n - \partial A = A_1 \cup A_2 \cup \underbrace{\left\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 \colon 1 < \frac{x_1^2}{4} + x_2^2 < 2 \right\}}_{=:\, A_3}$$

  nach Satz 10.4 als Vereinigung dreier offener Mengen offen (mit einem zum Beweis für die Offenheit von A_1 (und A_2) analogen Argument zeigt man, dass A_3 offen ist), sodass ∂A abgeschlossen ist.

  Da die Menge ∂A beschränkt und abgeschlossen ist, ist sie definitionsgemäß kompakt.

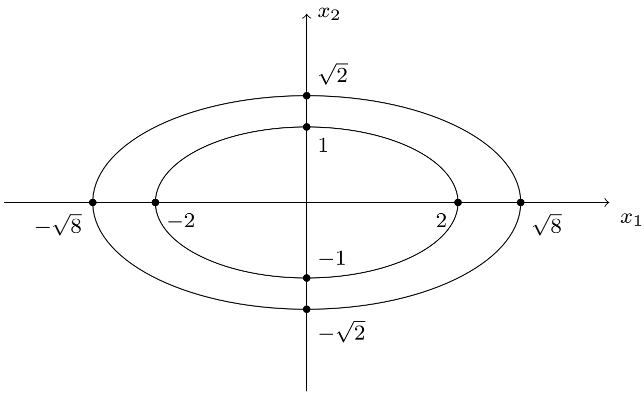

Abbildung 6: ∂A