UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M.Sc. Daniel Kraemer

Übungen zur Vorlesung
Mathematik für Naturwissenschaftler I
Wintersemester 2018/2019

Blatt 1 Abgabetermin: 30.10.2018

Sie dürfen ihren Lösungsvorschlag in Kleingruppen von bis zu drei Studierenden abgeben. Es ist nicht gestattet, dass einzelne Studierende zwischen verschiedenen Kleingruppen hin und her wechseln. Entscheidenen Sie sich im Falle einer Gruppenabgabe bitte einmalig für eine Kleingruppe und behalten Sie diese über das Semester bei. Gruppenübergreifende Abgaben sind nicht gestattet, d.h. alle Abgabepartner müssen die gleiche Übung besuchen.

Für zwei Teilmengen $A, B \subset \mathbb{R}$ bezeichne

$$A \times B = \left\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; a \in A \text{ und } b \in B\right\}$$

das **kartesische Produkt** *von A und B. Für $A = B$ schreibt man auch $A^2 = A \times A$.*

Aufgabe 1 (2+4=6 Punkte)

(a) Geben Sie die folgenden Mengen durch Aufzählen ihrer Elemente an:

$$M_1 = \left\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 \;\middle|\; a \cdot b = 210\right\} \qquad \text{und} \qquad M_2 = \left\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 \;\middle|\; a + b < \tfrac{7}{2}\right\}$$

(b) Gegeben seien die Mengen $A = \left\{x \in \mathbb{N} \;\middle|\; x^2 - 5x + 6 = 0\right\}, B = \{1,2\}, C = \{2,4\}$. Geben Sie die folgenden Mengen durch Aufzählen ihrer Elemente an:

(i) $A \times (B \cup C)$ (ii) $(A \times B) \cup (A \times C)$

(iii) $(A \times C) \cap (A \times B)$ (iv) $A \cup (B \times C)$

Aufgabe 2 (2+4=6 Punkte)

(a) Gegeben seien die Funktionen

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x^2 \qquad \text{und} \qquad g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto 4x + 3.$$

Berechnen Sie die Kompositionen $f \circ f$, $g \circ g$, $f \circ g$, $g \circ f$.

(b) Ist die durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 1, & -1 \leq x \leq 0 \\ x^2 + 1, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

definierte Funktion $f\colon [-1,1) \to [\frac{1}{2}, 2)$ bijektiv? Wenn ja, wie lautet die Umkehrfunktion? Zeichnen Sie den Funktionsgraphen von f sowie gegenenfalls den Graphen der Umkehrfunktion in ein gemeinsames Koordinatensystem.

(bitte wenden)

Aufgabe 3 **(3+1=4 Punkte)**

(a) Berechnen Sie Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen:

$$\frac{1+3i}{2-i}, \quad \frac{i}{i+1}, \quad \frac{2+3i}{1-i} + (\sqrt{2}+3i)(1-i)$$

(b) Zeichnen Sie die Teilmenge

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 2\} \cap \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) < 0\} \subset \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$$

der komplexen Zahlen in ein kartesisches Koordinatensystem.

Aufgabe 4 **(1+4 = 5 Punkte)**

Eine charakteristische Größe für eine wässrige Lösung ist die Konzentration der $\mathrm{H_3O^+}$-Ionen. In der Einheit mol/l berechnet sich ihr Zahlwert wie folgt:

$$[\mathrm{H_3O^+}] = \frac{\text{Anzahl } \mathrm{H_3O^+}\text{-Ionen}}{\text{Anzahl der Liter}} \cdot \frac{1}{N_A}$$

Hierbei bezeichnet $N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23}$ die Avogadrosche Konstante. Da die Größenordnung der Zahl $[\mathrm{H_3O^+}]$ von Lösung zu Lösung sehr stark schwanken kann, rechnet man statt dessen mit dem pH-Wert

$$pH = -\log_{10}\left([\mathrm{H_3O^+}]\right).$$

(a) Wie wirkt sich die Verzehnfachung der $\mathrm{H_3O^+}$-Ionen Konzentration einer Lösung auf deren pH-Wert aus?

(b) Es werden 2 Liter einer Lösung vom pH-Wert 5 mit 3 Litern einer anderen Lösung vom pH-Wert 6 gemischt. Welchen pH-Wert hat die Mischung, wenn davon ausgegangen werden kann, dass die gelösten Stoffe nach dem Mischen nicht miteinander reagieren? Runden Sie ihr Ergebnis auf drei Nachkommastellen.

(bitte wenden)