UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M.Sc. Daniel Kraemer

Lösungsvorschlag
Übungen zur Vorlesung
Mathematik für Naturwissenschaftler I
Wintersemester 2018/2019

Blatt 10 Abgabetermin: /

Aufgabe 37

Wir müssen das globale Minimum von

$$g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad x \longmapsto \sqrt{x^2 + (f(x))^2} = \sqrt{\frac{5}{4}x^2 - 4x + 16}$$

bestimmen. Da die Wurzelfunktion monoton wachsen ist, stimmt das globale Minimum von g mit dem globalen Minimum der beliebig oft differenzierbaren Funktion

$$h\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad x \longmapsto \frac{5}{4}x^2 - 4x + 16$$

überein. Es gilt

$$h'(x) = \frac{5}{2}x - 4 \qquad \text{für } x \in \mathbb{R},$$

sodass

$$h'(x) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \frac{8}{5}.$$

Wegen $h''(\frac{8}{5}) = \frac{5}{2} > 0$ hat h in $x = \frac{8}{5}$ ein lokales Minimum. Wegen $\lim_{x\to\infty} h(x) = \infty = \lim_{x\to-\infty} h(x)$, handelt es sich um das globale Minimum. Also ist $P = (\frac{8}{5}, f(\frac{8}{5})) = (\frac{8}{5}, \frac{16}{5})$ der Punkt auf dem Graphen von f, welcher minimalen Abstand zum Ursprung hat.

Aufgabe 38

(a) Die Funktion f ist zweimal differenzierbar mit

$$f'(x) = -\frac{x}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^3} \quad \text{und} \quad f''(x) = \frac{2x + \frac{1}{2}}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^4}$$

für $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$. Weiter gilt

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$$

und

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$$

und $f''(0) = \frac{1}{8} > 0$. Also hat f in 0 die einzige Nullstelle und ein lokales Minimum.

(bitte wenden)

(b) Wegen

$$f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x + \frac{1}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{1}{4}$$

und $f''(x) > 0$ für $x > -\frac{1}{4}$ bzw. $f''(x) < 0$ für $x < -\frac{1}{4}$, hat f in $x_0 = -\frac{1}{4}$ eine Wendestelle und ist auf $(-\infty, -\frac{1}{4})$ rechtsgekrümmt bzw. auf $(-\frac{1}{4}, \infty) \setminus \{\frac{1}{2}\}$ linksgekrümmt.

(c) Nach der Regel von L'Hospital (Satz 10.14) gilt

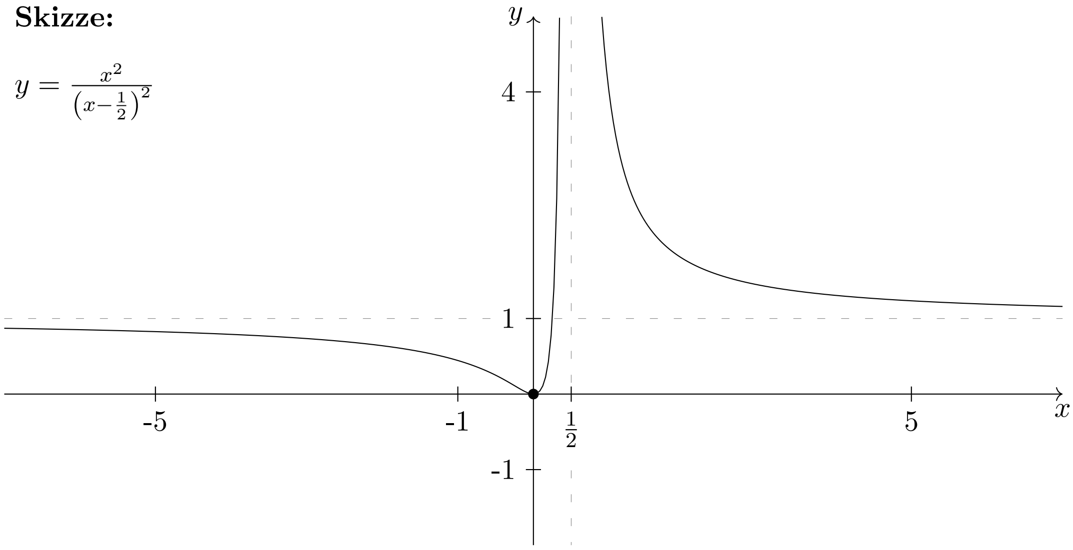
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{2\left(x - \frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{2} = 1$$

und entsprechend

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2} = 1.$$

(d) Wegen $f'(x) < 0$ für $x < 0$ ist f auf $(-\infty, 0)$ monoton fallend. Wegen $f'(x) > 0$ für $x \in (0, \frac{1}{2})$ ist f auf $(0, \frac{1}{2})$ monoton wachsend. Wegen $f'(x) < 0$ für $x \in (\frac{1}{2}, \infty)$ ist f auf $(\frac{1}{2}, \infty)$ monoton fallend.

(e) **Skizze:**



Aufgabe 39

Die Funktionen

$$\begin{aligned}
h_1\colon (0,\pi) \setminus \{\tfrac{\pi}{2}\} &\longrightarrow \mathbb{R}, & x &\longmapsto \cos^2(x),\\
h_2\colon (0,\pi) \setminus \{\tfrac{\pi}{2}\} &\longrightarrow \mathbb{R}, & x &\longmapsto \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2,\\
h_3\colon (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}) \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R}, & x &\longmapsto \cos(x)x,\\
h_4\colon (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}) \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R}, & x &\longmapsto \sin(x)
\end{aligned}$$

sind beliebig oft differenzierbar mit $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} h_1'(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} h_1(x) = 0 = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} h_2(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} h_2'(x)$ bzw. $\lim_{x\to 0} h_3(x) = 0 = \lim_{x\to 0} h_4(x)$ und

$$h_2''(x) = 2 \neq 0 \qquad (x \in (0,\pi) \setminus \{\tfrac{\pi}{2}\})$$

bzw.

$$h_4'(x) = \cos(x) \neq 0 \qquad (x \in (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}) \setminus \{0\}).$$

(bitte wenden)

Nach der Regel von L'Hospital (Satz 10.14) gilt

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2(x)}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-2\cos(x)\sin(x)}{2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-2(-\sin^2(x)+\cos^2(x))}{2} = 1$$

sowie

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos(x)}{\sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(x)x+\cos(x)}{\cos(x)} = 1.$$

Aufgabe 40

(a) Die Funktion f ist unendlich oft differenzierbar mit

$$\begin{aligned}
f(0) &= 0,\\
f'(0) &= 2x\cos(x^2)|_{x=0} = 0,\\
f''(0) &= 2\cos(x^2) - 4x^2\sin(x^2)|_{x=0} = 2,\\
f'''(0) &= -4x\sin(x^2) - 8x\sin(x^2) - 8x^3\cos(x^2)|_{x=0} = 0,
\end{aligned}$$

sodass ihr Taylorpolynom dritter Ordnung im Punkt $x_0 = 0$ gegeben ist durch

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad x \longmapsto \frac{f''(0)}{2!}x^2 = x^2.$$

(b) Die Funktion f ist beliebig oft differenzierbar und für die Taylorreihe von f gilt

$$\frac{1}{4-x} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{4}} = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x}{4}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{4^{k+1}}x^k \qquad (x \in (-4,4)).$$

Hierbei wurde beim zweiten Gleichheitszeichen die Konvergenz der geometrischen Reihe (siehe Beispiel 7.2(1)) verwendet.
