UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M.Sc. Daniel Kraemer

Lösungsvorschlag
Übungen zur Vorlesung
Mathematik für Naturwissenschaftler I
Wintersemester 2018/2019

Blatt 11 Abgabetermin: /

Aufgabe 41

(a) Es gilt

$$\int_0^1 4\sqrt{x} - 2x^3 \, dx = \left[\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^4\right]_0^1 = \frac{13}{6}.$$

(b) Es gilt

$$\int_9^{16} \sqrt{\frac{1}{x^3}} \, dx = \int_9^{16} x^{-\frac{3}{2}} \, dx = \left[\frac{-2}{\sqrt{x}}\right]_9^{16} = \frac{1}{6}.$$

(c) Partielle Integration (siehe Satz 11.8) liefert

$$\int_1^2 \frac{\ln(x)}{x^2} \, dx = \left[-\frac{\ln(x)}{x}\right]_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{x^2} \, dx = -\frac{\ln(2)}{2} + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^2 = -\frac{\ln(2)}{2} + \frac{1}{2}.$$

Aufgabe 42

Eine Polynomdivision mit Rest liefert

$$\begin{array}{l} \big(2x^3 - 4x^2 + 2x + 2\big) : \big(x^2 - 2x + 1\big) = 2x + \dfrac{2}{x^2 - 2x + 1} = 2x + \dfrac{2}{(x-1)^2} \\ \underline{-\, 2x^3 + 4x^2 - 2x} \\ \ 2 \end{array}$$

und daher ist

$$h_c \colon \mathbb{R} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad x \longmapsto x^2 - \frac{2}{x-1} + c$$

für jedes $c \in \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von

$$\mathbb{R} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad x \longmapsto \frac{2x^3 - 4x^2 + 2x + 2}{x^2 - 2x + 1}.$$

Wegen

$$h_c(0) = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 2 + c = 3 \quad \Leftrightarrow \quad c = 1$$

hat $f = h_1$ die gewünschten Eigenschaften.

(bitte wenden)

Aufgabe 43

(a) Die Substitution $x = \cos(u)$ (siehe auch Beispiel 11.10 (4)) liefert

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{1-\cos^2(u)}(-\sin(u))\,du\\ &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} -\sin^2(u)\,du\\ &= \left[\frac{1}{2}\left(x-\cos(x)\sin(x)\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\ &= \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

(b) Die Kettenregel (Satz 9.5) „rückwärts“ angewendet liefert

$$\begin{aligned}\int_{\ln(2)}^{\ln(5)} e^x\sqrt{e^x-1}\,dx &= \int_{\ln(2)}^{\ln(5)} \frac{d}{dx}(e^x)(e^x-1)^{\frac{1}{2}}\,dx\\ &= \left[\frac{2}{3}\left(e^x-1\right)^{\frac{3}{2}}\right]_{\ln(2)}^{\ln(5)}\\ &= \frac{2}{3}\left(\sqrt{4}^3-\sqrt{1}^3\right) = \frac{14}{3}.\end{aligned}$$

(c) Die Kettenregel (Satz 9.5) „rückwärts“ angewendet liefert

$$\int_0^{\frac{\pi^2}{9}} \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi^2}{9}} \frac{d}{dx}(\sqrt{x})\sin(\sqrt{x})\,dx = 2\left[-\cos(\sqrt{x})\right]_0^{\frac{\pi^2}{9}} = -2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+2 = 1.$$

Aufgabe 44

Nach Anwendung 11.6 (b) gilt

$$V = \pi\int_0^1 f(x)^2\,dx = \pi\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \pi\left[\arctan(x)\right]_0^1 = \pi\left(\frac{\pi}{4}-0\right) = \frac{\pi^2}{4}.$$
