UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M.Sc. Daniel Kraemer

Lösungsvorschlag
Übungen zur Vorlesung
Mathematik für Naturwissenschaftler I
Wintersemester 2018/2019

Blatt 12 Abgabetermin: /

Aufgabe 45

Es gilt

(a)
$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{s\to 0}\left[2\sqrt{x}\right]_s^1 = \lim_{s\to 0} 2 - 2\sqrt{s} = 2.$$

(b)
$$\int_0^\infty xe^{-x^2}\,dx = \lim_{s\to\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^s = \lim_{s\to\infty}\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-s^2} = \frac{1}{2}.$$

(c) Beachtet man, dass $\lim_{s\to\infty}\ln(s) = \infty$ (siehe Seite 48 im Skript), so folgt

$$\begin{aligned}\int_{e^2}^\infty \frac{dx}{x\,(\ln(x))^2}\,dx &= \lim_{s\to\infty}\int_{e^2}^s \frac{d}{dx}\,(\ln(x))\cdot\frac{1}{(\ln(x))^2}\,dx \\ &= \lim_{s\to\infty}\left[-\frac{1}{\ln(x)}\right]_{e^2}^s \\ &= \lim_{s\to\infty} -\frac{1}{\ln(s)} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Aufgabe 46

- Das Polynom $x^2 - 6x + 10$ hat keine reellen Nullstellen. Für $A, B \in \mathbb{R}$ gilt

$$\frac{7x^2 - 19x + 30}{x(x^2 - 6x + 10)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 - 6x + 10} = \frac{(A+B)x^2 + (C - 6A)x + 10A}{x(x^2 - 6x + 10)}$$

  genau dann, wenn $A + B = 7$, $C - 6A = -19$ und $10A = 30$, d.h. genau dann, wenn $A = 3$, $B = 4$ und $C = -1$.

- Für $A, B \in \mathbb{R}$ gilt

$$\frac{2x - 1}{(x-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} = \frac{Ax + B - A}{(x-1)^2}$$

  genau dann, wenn $A = 2$ und $B = 1$.

(bitte wenden)

Aufgabe 47

Es gilt (Polynomdivision)

$$\begin{array}{l} \left(2x^3 - 4x^2 + 2\right) : \left(x^2 - 2x\right) = 2x + \dfrac{2}{x^2 - 2x} = 2x + \dfrac{2}{x(x-2)} \\ \underline{-2x^3 + 4x^2} \\ \qquad\qquad 2 \end{array}$$

Für $A, B \in \mathbb{R}$ gilt (Partialbruchzerlegung)

$$\frac{2}{x(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} = \frac{(A+B)x - 2A}{x(x-2)}$$

genau dann, wenn $A = -1$ und $B = 1$. Somit folgt

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{2x^3 - 4x^2 + 2}{x^2 - 2x}\, dx &= \int_{\frac{1}{2}}^{1} 2x + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x}\, dx \\ &= \left[x^2 + \ln|x-2| - \ln|x|\right]_{\frac{1}{2}}^{1} \\ &= 1 - \frac{1}{4} - \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} - \ln(3). \end{aligned}$$

Aufgabe 48

(a) Für jedes $R > 3$ ist die Funktion

$$\varphi_R \colon [3, R] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad x \longmapsto x - 3$$

stetig differenzierbar mit $\frac{d}{dx}\varphi(x) = 1$ $(x \in (3, \infty))$. Also gilt Satz 11.9 (Substitution) zufolge

$$\begin{aligned} \int_3^\infty \frac{dx}{x^2 - 6x + 10} &= \int_3^\infty \frac{dx}{(x-3)^2 + 1} \\ &= \lim_{R \to \infty} \int_3^R \frac{1}{(\varphi_R(x))^2 + 1} \varphi_R'(x)\, dx \\ &= \lim_{R \to \infty} \int_{\varphi_R(3)}^{\varphi_R(R)} \frac{1}{u^2 + 1}\, du \\ &= \lim_{R \to \infty} \left[\arctan(u)\right]_0^{R-3} \\ &= \lim_{R \to \infty} \arctan(R - 3) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

(b) Die Funktion

$$f \colon [3, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{(x^2 - 6x + 10)\pi}}$$

hat die gewünschte Eigenschaft.

(bitte wenden)

Aufgabe 49*

Beachtet man Folgerung 8.8 (1), so gilt nach Anwendung 11.6 (c), dass

$$\begin{aligned}
L(\gamma) &= \int_0^\pi \sqrt{\left(\frac{d}{dt}(r\cos(t))\right)^2 + \left(\frac{d}{dt}(r\sin(t))\right)^2}\,dt \\
&= \int_0^\pi \sqrt{(-r\sin(t))^2 + (r\cos(t))^2}\,dt \\
&= \int_0^\pi \sqrt{r^2\left(\sin^2(t)+\cos^2(t)\right)}\,dt \\
&= \int_0^\pi r\,dt \\
&= [rt]_0^\pi = \pi r.
\end{aligned}$$