UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M.Sc. Daniel Kraemer

Lösungsvorschlag
Übungen zur Vorlesung
Mathematik für Naturwissenschaftler I
Wintersemester 2018/2019

Blatt 1 Abgabetermin: /

Aufgabe 1

(a) Es gilt $210 = 7 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5$ sodass

$$\begin{aligned} M_1 = \{&(7,30),(3,70),(2,105),(5,42)\\ &(21,10),(14,15),(35,6),(10,21),(15,14),(6,35)\\ &(42,5),(105,2),(30,7),(70,3)\\ &(1,210),(210,1)\}. \end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned} M_2 = \{&(0,0),(0,1),(0,2),(0,3)\\ &(1,0),(1,1),(1,2)\\ &(2,0),(2,1)\\ &(3,0)\}. \end{aligned}$$

(b) Für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \{2,3\}$$

sodass $A = \{2,3\}$. Es folgt:

(i) $A \times (B \cup C) = \{2,3\} \times \{1,2,4\} = \{(2,1),(2,2),(2,4),(3,1),(3,2),(3,4)\}$

(ii) $$\begin{aligned} (A \times B) \cup (A \times C) &= (\{2,3\} \times \{1,2\}) \cup (\{2,3\} \times \{2,4\})\\ &= \{(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\} \cup \{(2,2),(2,4),(3,2),(3,4)\}\\ &= \{(2,1),(2,2),(3,1),(3,2),(2,4),(3,4)\} \end{aligned}$$

(iii) $(A \times B) \cap (A \times C) = \{(2,2),(3,2)\}$

(iv) $A \cup (B \times C) = \{2,3\} \cup (\{1,2\} \times \{2,4\}) = \{2,3,(1,2),(1,4),(2,2),(2,4)\}$

Aufgabe 2

(a) Für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} (f \circ f)(x) &= \left(x^2\right)^2 = x^4\\ (g \circ g)(x) &= 4(4x+3)+3 = 16x+15\\ (f \circ g)(x) &= (4x+3)^2 = 16x^2+24x+9\\ (g \circ f)(x) &= 4x^2+3 \end{aligned}$$

(bitte wenden)

(b) Für $x > 0$ gilt

$$0 < x < 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < x^2 < 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 < x^2 + 1 < 2 \tag{1}$$

und für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$-1 \leq x \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}x \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}x + 1 \leq 1. \tag{2}$$

***f* ist injektiv:**

Seien $x_1, x_2 \in [-1, 1)$ mit $f(x_1) = f(x_2)$.

- Ist $f(x_1) = f(x_2) \leq 1$, so folgt aus (1) und (2), dass $x_1, x_2 \in [-1, 0]$. Weiter gilt
$$f(x_1) = f(x_2) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}x_1 + 1 = \frac{1}{2}x_2 + 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2.$$
- Ist $f(x_1) = f(x_2) > 1$, so folgt aus (2) und der Definition von f, dass $x_1, x_2 \in (0, 1)$. Weiter gilt
$$f(x_1) = f(x_2) \quad \Leftrightarrow \quad x_1^2 + 1 = x_2^2 + 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_1^2 = x_2^2 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2.$$

***f* ist surjektiv:**

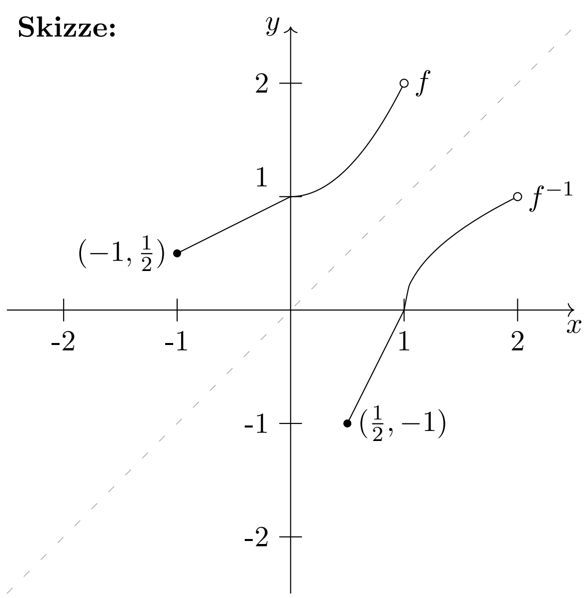
Sei $y \in [\frac{1}{2}, 2)$. Beachte für die folgende Fallunterscheidung nochmals die Umformungen in (1) und (2).

- Ist $y \in (1, 2)$, so gilt
$$1 < y < 2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < y - 1 < 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < \sqrt{y-1} < 1$$
und für $x = \sqrt{y-1} \in [0, 1) \subset [-1, 1)$ gilt
$$f(x) = \sqrt{y-1}^2 + 1 = y.$$
- Ist $y \in [\frac{1}{2}, 1]$, so folgt
$$\frac{1}{2} \leq y \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2} \leq y - 1 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -1 \leq 2(y-1) \leq 0$$
und für $x = 2(y-1) \in [-1, 0] \subset [-1, 1)$ gilt
$$f(x) = \frac{1}{2}\left(2(y-1)\right) + 1 = y.$$

Also ist f bijektiv und die obigen Rechnungen zeigen, dass die Umkehrfunktion $f^{-1}\colon [\frac{1}{2}, 2) \to [-1, 1)$ von f gegeben ist durch

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} 2(y-1), & \frac{1}{2} \leq y \leq 1 \\ \sqrt{y-1}, & 1 < y < 2 \end{cases}.$$

Skizze:

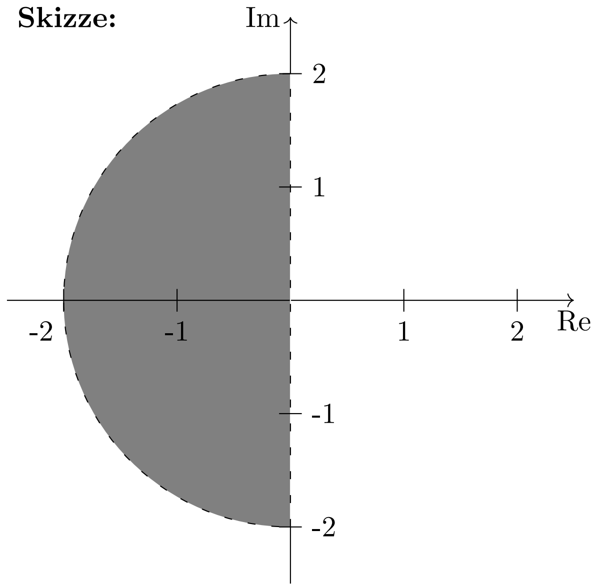


(bitte wenden)

Aufgabe 3

(a)
- Es gilt
$$\frac{1+3i}{2-i} = \frac{(1+3i)(2+i)}{|2-i|^2} = \frac{-1+7i}{5} = -\frac{1}{5} + \frac{7}{5}i$$
sodass $\operatorname{Re}\left(\frac{1+3i}{2-i}\right) = -\frac{1}{5}$ und $\operatorname{Im}\left(\frac{1+3i}{2-i}\right) = \frac{7}{5}$.
- Es gilt
$$\frac{i}{i+1} = \frac{i(1-i)}{|i+1|^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$
sodass $\operatorname{Re}\left(\frac{i}{i+1}\right) = -\frac{1}{2}$ und $\operatorname{Im}\left(\frac{i}{i+1}\right) = \frac{1}{2}$.
- Es gilt
$$\begin{aligned} \frac{2+3i}{1-i} + (\sqrt{2}+3i)(1-i) &= -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}i + \sqrt{2} + 3 + (3-\sqrt{2})i \\ &= \sqrt{2} + \frac{5}{2} + \left(\frac{11}{2} - \sqrt{2}\right)i, \end{aligned}$$
sodass $\operatorname{Re}\left(\frac{2+3i}{1-i} + (\sqrt{2}+3i)(1-i)\right) = \sqrt{2} + \frac{5}{2}$ und $\operatorname{Im}\left(\frac{2+3i}{1-i} + (\sqrt{2}+3i)(1-i)\right) = \frac{11}{2} - \sqrt{2}$.

(b) **Skizze:**



Aufgabe 4

(a) Verzehnfacht man die H_3O^+-Ionen Konzentration einer Lösung mit der Konzentration $[H_3O^+]$ und dem pH-Wert pH_a, so gilt für den pH-Wert der konzentrierteren Lösung
$$\begin{aligned} pH &= -\log_{10}\left(10 \cdot [H_3O^+]\right) \\ &= -\left(\log_{10}(10) + \log_{10}\left([H_3O^+]\right)\right) \\ &= -1 - \log_{10}([H_3O^+]) = -1 + pH_a, \end{aligned}$$
d.h. bei Verzehnfachung der H_3O^+-Ionen Konzentration verringert sich der pH-Wert um 1.

(bitte wenden)

(b) Es bezeichne A_5 (bzw. A_6) die Anzahl von H_3O^+-Ionen in der gegebenen Lösung vom pH-Wert 5 (bzw. vom pH-Wert 6). Dann gilt

$$5 = -\log_{10}\left(\frac{A_5}{2} \cdot \frac{1}{N_A}\right) \quad \Leftrightarrow \quad 10^{-5} = \frac{A_5}{2} \cdot \frac{1}{N_A} \quad \Leftrightarrow \quad A_5 = 2 \cdot 10^{-5} \cdot N_A$$

sowie

$$6 = -\log_{10}\left(\frac{A_6}{3} \cdot \frac{1}{N_A}\right) \quad \Leftrightarrow \quad A_6 = 3 \cdot 10^{-6} \cdot N_A.$$

Somit folgt für den pH-Wert pH_M der gemischten Lösung

$$pH_M = -\log_{10}\left(\frac{A_5 + A_6}{5} \cdot \frac{1}{N_A}\right) = -\log_{10}\left(\frac{2 \cdot 10^{-5} + 3 \cdot 10^{-6}}{5}\right) \approx 5,337.$$