UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M.Sc. Daniel Kraemer

Lösungsvorschlag
Übungen zur Vorlesung
Mathematik für Naturwissenschaftler I
Wintersemester 2018/2019

Blatt 2 Abgabetermin: /

Aufgabe 1

(a) (i) An der ersten Stelle des Passwortes können 26 verschiedene Großbuchstaben stehen. Da die ersten drei Stellen des Passwortes verschiedene Großbuchstaben enthalten sollen, gibt es an der zweiten bzw. dritten Stelle noch 25 bzw. 24 Möglichkeiten. Bei den letzten 3 bis 5 Stellen gibt es 10^3, 10^4 bzw. 10^5 verschiedene Möglichkeiten, sodass es insgesamt

$$26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot (10^3 + 10^4 + 10^5) = 1\,731\,600\,000$$

mögliche Passwörter gibt.

(ii) Nach Voraussetzung kann die Zeichenfolge 'B4' im Passwort nur den Platz des dritten und vierten Zeichens einnehmen. Demnach gibt es noch

$$25 \cdot 24 \cdot (10^2 + 10^3 + 10^4) = 6\,660\,000$$

mögliche Passwörter.

(b)
- 11 Möglichkeiten das eine M zu platzieren,
- $\binom{10}{2}$ Möglichkeiten die zwei p's zu platzieren
- $\binom{8}{4}$ Möglichkeiten die vier s's zu platzieren
- $\binom{4}{4}$ Möglichkeiten die vier i's zu platzieren

Insgesamt erhält man also

$$11 \cdot \binom{10}{2} \cdot \binom{8}{4} \cdot \binom{4}{4} = 34650$$

mögliche Wörter durch Umordnung der Buchstaben des Wortes 'Mississippi'.

Aufgabe 2

(a)
- Es sei $A(n)$ die Aussage

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Induktionsanfang : (Beweis von $A(1)$)

(bitte wenden)

Es ist
$$\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1(1+1)}{2},$$
sodass $A(1)$ richtig ist.

Induktionsschritt : $(A(n) \Rightarrow A(n+1))$
Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir beweisen, dass die **Induktionsvoraussetzung**
$$A(n)\colon \qquad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \tag{1}$$
die **Induktionsbehauptung**
$$A(n+1)\colon \qquad \sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$
impliziert. Es gilt
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k &= \sum_{k=1}^{n} k + (n+1)\\ &\overset{(1)}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)\\ &= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}\\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}.\end{aligned}$$
Damit haben wir $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ gezeigt.

- Es sei $A(n)$ die Aussage
$$\sum_{k=1}^{n} k2^k = 2 + 2^{n+1}(n-1).$$

Induktionsanfang : (Beweis von $A(1)$)
Es ist
$$\sum_{k=1}^{1} k2^k = 2 = 2 + 2^2(1-1),$$
sodass $A(1)$ richtig ist.

Induktionsschritt : $(A(n) \Rightarrow A(n+1))$
Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir beweisen, dass die **Induktionsvoraussetzung**
$$A(n)\colon \qquad \sum_{k=1}^{n} k2^k = 2 + 2^{n+1}(n-1) \tag{2}$$
die **Induktionsbehauptung**
$$A(n+1)\colon \qquad \sum_{k=1}^{n+1} k2^k = 2 + 2^{n+2}n$$

(bitte wenden)

impliziert. Es gilt

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k2^k &= \sum_{k=1}^{n} k2^k + (n+1)2^{n+1} \\ &\overset{(2)}{=} 2 + 2^{n+1}(n-1) + 2^{n+1}(n+1) \\ &= 2 + 2^{n+1}((n-1)+(n+1)) \\ &= 2 + 2^{n+1}2n \\ &= 2 + 2^{n+2}n.\end{aligned}$$

Damit haben wir $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ gezeigt.

(b) Es sei $A(n)$ die Aussage

$$3 \mid n^3 + 2n.$$

Induktionsanfang : (Beweis von $A(0)$)
Es ist

$$0^3 + 2 \cdot 0 = 0,$$

sodass $A(0)$ richtig ist.

Induktionsschritt : ($A(n) \Rightarrow A(n+1)$)
Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir beweisen, dass die **Induktionsvoraussetzung**

$$A(n): \qquad 3 \mid n^3 + 2n \tag{3}$$

die **Induktionsbehauptung**

$$A(n+1): \qquad 3 \mid (n+1)^3 + 2(n+1)$$

impliziert. Es gilt

$$(n+1)^3 + 2(n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 2n + 2 = n^3 + 2n + 3(n^2 + n + 1)$$

und da $3 \mid n^3 + 2n$ nach (3) und $3 \mid 3(n^2 + n + 1)$ offenbar richtig ist, ist $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ gezeigt.

(c) Für $n \geq 4$ sei $A(n)$ die Aussage

$$2^n \leq n!.$$

Induktionsanfang : (Beweis von $A(4)$)
Es ist

$$2^4 = 16 \leq 24 = 4!,$$

sodass $A(4)$ richtig ist.

Induktionsschritt : ($A(n) \Rightarrow A(n+1)$)
Sei $n \geq 4$ eine natürliche Zahl. Wir beweisen, dass die **Induktionsvoraussetzung**

$$A(n): \qquad 2^n \leq n! \tag{4}$$

die **Induktionsbehauptung**

$$A(n+1)\colon \qquad 2^{n+1} \le (n+1)!$$

impliziert. Beachtet man, dass $2 \le k$ für $k \ge 4$ gilt, so folgt

$$2^{n+1} = 2^n \cdot 2 \overset{(4)}{\le} n! \cdot 2 \le n! \cdot (n+1) = (n+1)!$$

Damit haben wir $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ gezeigt.

Aufgabe 3

(a) Es sei $A(n)$ die Aussage:
Nach n Jahren beträgt die C^{14}-Konzentration

$$K(n) = \frac{K(0)}{q^n}.$$

Induktionsanfang : (Beweis von $A(1)$)
Nach einem Jahr beträgt die C^{14}-Konzentration offenbar noch $K(1) = \frac{K(0)}{q}$, sodass $A(1)$ richtig ist.

Induktionsschritt : ($A(n) \Rightarrow A(n+1)$)
Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir beweisen, dass die **Induktionsvoraussetzung**

$$A(n)\colon \qquad K(n) = \frac{K(0)}{q^n} \tag{5}$$

die **Induktionsbehauptung**

$$A(n+1)\colon \qquad K(n+1) = \frac{K(0)}{q^{n+1}}$$

impliziert. Da die C^{14}-Konzentration nach einem Jahr um den Faktor q abnimmt, gilt

$$K(n+1) = \frac{K(n)}{q} \overset{(5)}{=} \frac{\frac{K(0)}{q^n}}{q} = \frac{K(0)}{q^{n+1}}.$$

Also ist $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ gezeigt.

(b) Nach Teil (a) gilt (beachte: $q > 0$)

$$\begin{aligned} 3 \cdot 10^{10} = K(5760) = \frac{K(0)}{q^{5760}} &= \frac{6 \cdot 10^{10}}{q^{5760}} \\ \Leftrightarrow \quad q^{5760} &= \frac{6 \cdot 10^{10}}{3 \cdot 10^{10}} = 2 \\ \Leftrightarrow \quad q &= \sqrt[5760]{2} \approx 1{,}00012. \end{aligned}$$

(bitte wenden)

(c) Es gilt (mit $q = 1,00012$)

$$\begin{aligned} 2,8 \cdot 10^{10} = K(n) &= \frac{6 \cdot 10^{10}}{q^n} \\ \Leftrightarrow \quad q^n &= \frac{15}{7} \\ \Leftrightarrow \quad n &= \frac{15}{7} \cdot \frac{1}{\log_{10}(1,00012)} \approx 6351,55 \end{aligned}$$

Also fand die Naturkatastrophe vor ca. 6351 Jahren statt.

Aufgabe 4

(a) Beachte Abschnitt 4.2 (a) im Skript: Gesucht ist das Anfangskapital K, sodass nach $n = 18$ Jahren

$$30000 = K\left(1 + \frac{5}{100}\right)^{18}$$

gilt. Somit folgt

$$K = \frac{30000}{\left(1 + \frac{5}{100}\right)^{18}} \approx 12465\,€.$$

(b) (1) Es gilt

$$K_1 = 24000\,€ \cdot \left(1 + \frac{4}{100}\right) = 24960\,€$$

(2) Beachte Abschnitt 4.2 (b) im Skript: Nach dem 12. Jahresabschnitt gilt für den Endbetrag K_1 (mit $q = \left(1 + \frac{8}{1200}\right)$)

$$K_1 = 2000\,€ \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = 2000\,€ \cdot \frac{\left(1 + \frac{8}{1200}\right)^{12} - 1}{\frac{8}{1200}} \approx 24899{,}85\,€.$$

Bei Anlageoption (1) bekommt die Frau nach 12 Monaten den höheren Geldbetrag ausgezahlt.
