**UNIVERSITÄT DES SAARLANDES**
**FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK**
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M.Sc. Daniel Kraemer

**Lösungsvorschlag**
**Übungen zur Vorlesung**
**Mathematik für Naturwissenschaftler I**
Wintersemester 2018/2019

**Blatt 3** Abgabetermin: /

---

## Aufgabe 9

(a) Es gilt

$$1 - i = \sqrt{2}e^{i\frac{7}{4}\pi}.$$

Nach der Formel von Moivre gilt

$$(1+i)^2 = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{1}{4}\pi}\right)^2 = 2e^{\frac{i}{2}\pi}.$$

Ferner gilt $e^{i\frac{5}{2}\pi} = e^{i\frac{1}{2}\pi}$.

(b) Für $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned} 4z^2 - \frac{13}{16} = 3iz \quad &\Leftrightarrow \quad z^2 - \frac{3}{4}iz - \frac{13}{64} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \left(z - \frac{3}{8}i\right)^2 - \left(\frac{3}{8}i\right)^2 - \frac{13}{64} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \left(z - \frac{3}{8}i\right)^2 = \frac{1}{16} \\ &\Leftrightarrow \quad z - \frac{3}{8}i = \pm\frac{1}{4} \\ &\Leftrightarrow \quad z \in \left\{-\frac{1}{4} + \frac{3}{8}i, \frac{1}{4} + \frac{3}{8}i\right\}. \end{aligned}$$

(c) Für $z = |z|e^{i\varphi} \in \mathbb{C}$ schreibe $w = |w|e^{i\theta} = z^2$. Dann gilt

$$z^4 = 1 - i \quad \Leftrightarrow \quad |w|^2 e^{i2\theta} = \sqrt{2}e^{i\frac{7}{4}\pi} \quad \Leftrightarrow \quad |w| = \sqrt[4]{2} \text{ und } \theta \in \left\{\frac{7}{8}\pi, \frac{15}{8}\pi\right\},$$

sodass

$$\begin{aligned} z^2 = w \quad &\Leftrightarrow \quad |z|^2 e^{i2\varphi} = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{7}{8}\pi} \text{ oder } |z|^2 e^{i2\varphi} = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{15}{8}\pi} \\ &\Leftrightarrow \quad \left(|z| = \sqrt[8]{2} \text{ und } \varphi \in \left\{\tfrac{7}{16}\pi, \tfrac{23}{16}\pi\right\}\right) \text{ oder } \left(|z| = \sqrt[8]{2} \text{ und } \varphi \in \left\{\tfrac{15}{16}\pi, \tfrac{31}{16}\pi\right\}\right) \\ &\Leftrightarrow \quad z \in \left\{\sqrt[8]{2}e^{i\frac{7}{16}\pi}, \sqrt[8]{2}e^{i\frac{23}{16}\pi}, \sqrt[8]{2}e^{i\frac{15}{16}\pi}, \sqrt[8]{2}e^{i\frac{31}{16}\pi}\right\}. \end{aligned}$$

---

**(bitte wenden)**

## Aufgabe 10

(a) Für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} |x+4|+|x|-x-8<0 \quad &\Leftrightarrow \quad |x+4| < x+8-|x| \\ &\Leftrightarrow \quad |x|-x-8 < x+4 < x+8-|x| \\ &\Leftrightarrow \quad |x| < 2x+12 \quad \wedge \quad |x|<4 \\ &\Leftrightarrow \quad -(2x+12) < x < 2x+12 \quad \wedge \quad -4<x<4 \\ &\Leftrightarrow \quad -4<x \quad \wedge \quad -12<x \quad \wedge \quad -4<x<4 \\ &\Leftrightarrow \quad x \in (-4,4), \end{aligned}$$

also $\{x \in \mathbb{R} \mid |x+4|+|x|-x-8<0\} = (-4,4)$.

(b) Für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} ||x-5|-3| \le 4 \quad &\Leftrightarrow \quad -4 \le |x-5|-3 \le 4 \\ &\Leftrightarrow \quad -1 \le |x-5| \le 7 \\ &\Leftrightarrow \quad -1 \le |x-5| \quad \wedge \quad |x-5| \le 7 \\ &\Leftrightarrow \quad |x-5| \le 7 \\ &\Leftrightarrow \quad -7 \le x-5 \le 7 \\ &\Leftrightarrow \quad -2 \le x \le 12 \\ &\Leftrightarrow \quad x \in [-2,12], \end{aligned}$$

also $\{x \in \mathbb{R} \mid ||x-5|-3| \le 4\} = [-2,12]$.

---

## Aufgabe 11

(a) Nach den Grenzwertsätzen für Folgen gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{17n^4+7}{13n^4+n^2-5} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4\left(17+\frac{7}{n^4}\right)}{n^4(13+\frac{1}{n^2}-\frac{5}{n^4})} = \lim_{n\to\infty} \frac{17+\lim_{n\to\infty}\frac{7}{n^4}}{13+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}-\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n^4}} = \frac{17}{13}.$$

(b) Für alle natürlichen Zahlen $n \ge 2$ gilt $\frac{5}{n^4} \le 1$ und folglich

$$\frac{6n^7+n}{n^6+5n^2} = \frac{6n+\frac{1}{n^6}}{1+\frac{5}{n^4}} \ge \frac{6n}{1+\frac{5}{n^4}} \ge 3n.$$

Somit ist die Folge $\left(\frac{6n^7+n}{n^6+5n^2}\right)_{n\ge1}$ unbeschränkt und daher insbesondere divergent, d.h. der Grenzwert $\lim_{n\to\infty}\frac{6n^7+n}{n^6+5n^2}$ existiert nicht.

---

## Aufgabe 12

(a) (i) Wir definieren $a_n = b_n = (-1)^n$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} (-1)^{2n} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

**(bitte wenden)**

(ii) Für die durch $b_0 = 1$, $b_n = \frac{1}{n}$ $(n \geq 1)$ und $a_n = n$ $(n \in \mathbb{N})$ gegebenen Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ bzw. $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Weiter folgt

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

(b) Wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $a_n \neq 0$ für alle $n \geq N$ und sei $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Dann folgt aus den Grenzwertsätzen für Folgen

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} \cdot a_n b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} \lim_{n\to\infty} a_n b_n = \frac{1}{a}.$$