UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M.Sc. Daniel Kraemer

Übungen zur Vorlesung
Mathematik für Naturwissenschaftler I
Wintersemester 2018/2019

Blatt 4 Abgabetermin: 20.11.2018

Aufgabe 13 (2+2=4 Punkte)

Untersuchen Sie nachstehende Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:

(a) $\left(\frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ (b) $\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(*Hinweis zu (b): Erweitern Sie mit* $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$.)

Aufgabe 14 (6 Punkte)

Zeigen Sie, dass die durch

$$a_0 = \frac{1}{4}, \quad a_{n+1} = a_n(1-a_n) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist und bestimmen Sie ihren Grenzwert. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

- Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass $a_n \in (0,1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
- Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist.
- Verwenden Sie Folgerung 6.12 aus der Vorlesung um zu begründen, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und berechnen Sie den Grenzwert, indem Sie auf beiden Seiten der Gleichung $a_{n+1} = a_n(1-a_n)$ zum Grenzwert übergehen.

Aufgabe 15 (4 Punkte)

Verwenden Sie den Zwischenwertsatz um zu begründen, dass die Gleichung

$$x^4 + x + 2 = 5x^3$$

(mindestens) eine Lösung $x \in [0,1]$ besitzt.

(bitte wenden)

Aufgabe 16 **(3+4=7 Punkte)**

Untersuchen Sie, in welchen Punkten die folgenden Funktionen stetig sind und skizzieren Sie ihre Funktionsgraphen:

(a) $f\colon [-2,2] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad x \longmapsto \begin{cases} -x, & x \in [-2,-1) \\ x, & x \in [-1,2] \end{cases}$

(b) $g\colon [-1,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad x \longmapsto \begin{cases} 1, & x \in [-1,1] \\ x^2, & x \in (1,2] \\ 2x+1, & x \in (2,\infty) \end{cases}$

(*Hinweis : Beachten Sie die Beispiele 5.9 und 5.11 aus der Vorlesung.*)