UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M.Sc. Daniel Kraemer

Lösungsvorschlag
Übungen zur Vorlesung
Mathematik für Naturwissenschaftler I
Wintersemester 2018/2019

Blatt 4 Abgabetermin: /

Aufgabe 13

(a) Wir zeigen mit Hilfe von Satz 6.14, dass die Folge $\left(\frac{1}{2}+\frac{(-1)^n}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht konvergiert. Wir setzen $a_n = \frac{1}{2}+\frac{(-1)^n}{2}$ $(n\in\mathbb{N})$. Für die Teilfolgen $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}+\frac{(-1)^{2n}}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$$

bzw.

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}+\frac{(-1)^{2n+1}}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}-\frac{1}{2} = 0.$$

Nach Satz 6.14 (a) besitzt die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ also die beiden unterschiedlichen Häufungspunkte 1 und 0. Satz 6.14 (d) zufolge ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht konvergent.

(b) Wir zeigen, dass die Folge $(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Für $n\geq 1$ gilt $\sqrt{n+1}\geq 0$ und folglich

$$0 \leq \sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Da die Folge $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\geq 1}$ gegen 0 konvergiert, konvergiert die Folge $(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ wegen obiger Abschätzung auch gegen 0.

Aufgabe 14

- **Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt:**

  Sei $A(n)$ die Aussage

  $$a_n \in (0,1)$$

  Induktionsanfang (Beweis von $A(0)$)

  Es gilt $a_0 = \frac{1}{4} \in (0,1)$ sodass $A(0)$ richtig ist.

  Induktionsschritt ($A(n) \Rightarrow A(n+1)$)

  Sei $n\in\mathbb{N}$. Wir beweisen, dass die **Induktionsvoraussetzung**

  $$A(n): \qquad a_n \in (0,1)$$

(bitte wenden)

die **Induktionsbehauptung**

$$A(n+1): \qquad a_{n+1} \in (0,1)$$

impliziert. Aus der Induktionsvoraussetzung folgt $1 - a_n \in (0,1)$, sodass

$$a_{n+1} = a_n(1-a_n) > 0 \cdot (1-a_n) = 0 \text{ und } a_{n+1} = a_n(1-a_n) < 1 \cdot (1-0) = 1.$$

Damit haben wir $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ gezeigt.

- **Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend:**
  Es sei $n \in \mathbb{N}$. Dann folgt aus $a_n \in (0,1)$, dass

  $$a_{n+1} = a_n(1-a_n) < a_n(1-0) = a_n.$$

- Insgesamt ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als monoton fallende, beschränkte Folge nach Folgerung 6.12 konvergent. Es sei $a \in \mathbb{R}$ ihr Grenzwert. Dann folgt aus den Grenzwertsätzen (Satz 5.5) und wegen Satz 6.14 (b), dass

  $$a \overset{6.14(b)}{=} \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n(1-a_n) \overset{5.5}{=} \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty}(1-a_n) \overset{5.5}{=} a \cdot (1 - \lim_{n\to\infty} a_n) = a(1-a).$$

  Schließlich zeigen die Äquivalenzumformungen

  $$a = a(1-a) \quad\Leftrightarrow\quad a = a - a^2 \quad\Leftrightarrow\quad a^2 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad a = 0,$$

  dass $\lim_{n\to\infty} a_n = a = 0$.

Aufgabe 15

Als Polynom ist die Funktion

$$f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad x \longmapsto x^4 - 5x^3 + x + 2$$

stetig (siehe Beispiel 5.9 (4)). Weiter gilt

$$f(0) = 2 > 0 > -1 = f(1).$$

Nach dem Zwischenwertsatz (Satz 6.3) gibt es $x \in [0,1]$ mit $f(x) = 0$. Wegen

$$f(x) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x^4 - 5x^3 + x + 2 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x^4 + x + 2 = 5x^3$$

hat die gefundene Zahl x die gewünschte Eigenschaft.

Aufgabe 16

(a) Da die Funktion f auf den Intervallen $[-2,-1)$ und $(-1,2]$ mit den Polynomen

$$[-2,-1) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad x \longmapsto -x$$

bzw.

$$(-1,2] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad x \longmapsto x$$

übereinstimmt und letztere nach Beispiel 5.9 (4) stetig sind, ist auch f in allen Punkten $x \in [-2,-1) \cup (-1,2]$ stetig. f ist an der Stelle -1 nicht stetig, denn die Folgen $\left(-1-\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ und $\left(-1+\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ aus $[-2,2]$ konvergieren beide gegen -1, aber es gilt

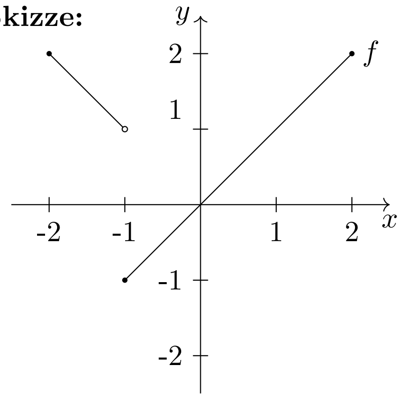
$$\lim_{n\to\infty} f(-1-\tfrac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty} -\left(-1-\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$$

bzw.

$$\lim_{n\to\infty} f(-1+\tfrac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty} -1 + \frac{1}{n} = -1.$$

(bitte wenden)

Skizze:



(b) Als Zusammensetzung stetiger Funktionen ist g stetig auf $[-1,1) \cup (1,2) \cup (2,\infty)$. Da die stetigen Funktionen

$$[-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad x \longmapsto 1$$

bzw.

$$[1,2] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad x \longmapsto x^2$$

mit den Einschränkungen $g\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ bzw. $g\colon [1,2] \to \mathbb{R}$ von g auf die Intervalle $[-1,1]$ und $[1,2]$ übereinstimmen, ist auch die Einschränkung $g\colon [-1,2] \to \mathbb{R}$ von g nach Beispiel 5.11 stetig, d.h. g ist insbesondere an der Stelle 1 stetig.

Weiter konvergieren die Folgen $\left(2 - \frac{1}{n}\right)_{n\geq 2}$ und $\left(2 + \frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ gegen 2 und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} g\left(2 - \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(2 - \frac{1}{n}\right)^2 = \left(\lim_{n\to\infty} \left(2 - \frac{1}{n}\right)\right)^2 = 4$$

sowie

$$\lim_{n\to\infty} g\left(2 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} 2\left(2 + \frac{1}{n}\right) + 1 = 2 \lim_{n\to\infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right) + 1 = 5,$$

nach den Grenzwertsätzen. Nach Definition 5.8(i) ist g nicht stetig an der Stelle 2.

Skizze: