UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M.Sc. Daniel Kraemer

Lösungsvorschlag
Übungen zur Vorlesung
Mathematik für Naturwissenschaftler I
Wintersemester 2018/2019

Blatt 5 Abgabetermin: /

Aufgabe 17

(a) Wegen $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$ und $\left|-\frac{1}{3}\right| < 1$ gilt nach Beispiel 7.2 (1), dass

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2 \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3^k} = \frac{3}{4}.$$

Die Rechenregeln 7.3 liefern

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} + \frac{(-1)^k}{3^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3^k} = 2 + \frac{3}{4} = \frac{11}{4}.$$

(b) Wir berechnen mit Hilfe des Hinweises

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} \\
&= \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1.
\end{aligned}$$

Aufgabe 18

(a) Wegen den Grenzwertsätzen (Satz 5.5) gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \left| \frac{\frac{(k+1)^3}{5^{k+1}}}{\frac{k^3}{5^k}} \right| &= \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^3}{k^3} \cdot \frac{5^k}{5^{k+1}} \\
&= \frac{1}{5} \lim_{k\to\infty} \frac{k^3\left(1 + \frac{3}{k} + \frac{3}{k^2} + \frac{1}{k^3}\right)}{k^3} \\
&= \frac{1}{5} \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{3}{k} + \frac{3}{2} + \frac{1}{k^3}\right) \\
&= \frac{1}{5} < 1.
\end{aligned}$$

Somit konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^3}{5^k}$ nach dem Quotientenkriterium (Satz 7.8).

(bitte wenden)

(b) Für jede natürliche Zahl $k \geq 1$ gilt die Abschätzung

$$0 \leq \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(k+1)\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{k+1}\sqrt{k}} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{\sqrt{k^2+k}} - \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{\sqrt{k^2}} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

Da $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ nach Teil (b) aus Aufgabe 17 konvergiert, folgt aus dem Majorantenkriterium (Satz 7.7), dass auch die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(k+1)\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(k+1)\sqrt{k}} \right|$$

konvergiert.

(c) Für $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$0 \leq \frac{1}{4^k+27} \leq \frac{1}{4^k}$$

und wegen $\left|\frac{1}{4}\right| < 1$ konvergiert Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4^k+27}$ nach Beispiel 7.2 (1). Nach dem Majorantenkriterium (Satz 7.7) konvergiert daher auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4^k+27}$.

Aufgabe 19

Für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{\frac{x^{k+1}}{k+1}}{\frac{x^k}{k}} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{|x|^{k+1}}{k+1} \cdot \frac{k}{|x|^k} = |x| \lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+1} = |x|.$$

Also konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ für alle $x \in (-1,1)$ und divergiert für alle $x \in \mathbb{R} \setminus [-1,1]$ nach dem Quotientenkriterium.

Ist $x = -1$, so konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ nach Beispiel 7.6.

Ist $x = 1$, so divergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ nach Beispiel 7.2 (2).

Aufgabe 20

Wir berechnen

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{5} \frac{x_i}{5} = -\frac{2}{5} - \frac{1}{5} + \frac{0}{5} + \frac{1}{5} + \frac{2}{5} = 0$$

und

$$\overline{y} = \sum_{i=1}^{5} \frac{y_i}{5} = \frac{0}{5} - \frac{1}{5} + \frac{0}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{1}{5}.$$

Weiter folgt

$$a_0 = \frac{\left(\sum_{i=1}^{5} x_i y_i\right) - 5\overline{xy}}{\left(\sum_{i=1}^{5} x_i^2\right) - 5\overline{x}^2} = \frac{-2\cdot 0 + (-1)\cdot(-1) + 0\cdot 0 + 1\cdot 1 + 2\cdot 1 - 0}{4+1+0+1+4-0} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

sowie

$$b_0 = \overline{y} - a_0\overline{x} = \frac{1}{5}.$$

Nach Satz 8.1 ist die Regressionsgerade gegeben durch

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad x \longmapsto \frac{2}{5}x + \frac{1}{5}.$$

(bitte wenden)

Skizze: