UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M.Sc. Daniel Kraemer

Lösungsvorschlag
Übungen zur Vorlesung
Mathematik für Naturwissenschaftler I
Wintersemester 2018/2019

Blatt 6 Abgabetermin: /

Aufgabe 21

Nach Satz 5.10 und Satz 8.5 (iii) ist die Funktion

$$f\colon [2,3] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad x \longmapsto e^{x-2} - 3x + 6$$

stetig. Weiter gilt

$$f(2) = 1 > 0 > e - 3 = f(3). \qquad \text{(beachte: } e \approx 2{,}718 < 3\text{)}$$

Nach dem Zwischenwertsatz (Satz 6.3) gibt es $x \in [2,3]$ mit $f(x) = 0$. Wegen

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{x-2} = 3x - 6$$

hat die gefundene Zahl x die gewünschte Eigenschaft.

Aufgabe 22

(a) Nach Beispiel 7.2 (1) ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ absolut konvergent mit Reihenwert 2. Somit folgt aus der Cauchy-Produktformel (Satz 7.9), dass

$$4 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

(b) Mit den Rechenregeln 7.3 und Beispiel 7.2 (1) berechnet man

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+m}}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{2^m}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^m}\right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^m}\right) = 4.$$

Aufgabe 23

	3	0	2	-4
	+	+	+	+
$x_0 = 2$	0	6	12	28
	3	6	14	24

	3	0	2	-4
	+	+	+	+
$x_0 = -4$	0	-12	48	-200
	3	-12	50	-204

(bitte wenden)

Aufgabe 24

(a) Wir raten die Nullstelle $z_0 = -1$. Die Polynomdivision

$$\begin{array}{l}
\big(\quad z^3 + z^2 + z + 1\big) : \big(z+1\big) = z^2 + 1 \\
\underline{-\,z^3 - z^2} \\
\qquad\qquad\quad z + 1 \\
\qquad\qquad\underline{-\,z - 1} \\
\qquad\qquad\qquad\ 0
\end{array}$$

liefert

$$z^3 + z^2 + z + 1 = (z+1)(z^2+1) = (z+1)(z-i)(z+i).$$

(b) Wir raten die Nullstelle $z_0 = 2$. Die Polynomdivision

$$\begin{array}{l}
\big(\quad z^4 - 2z^3 + z^2 \qquad\quad - 4\big) : \big(z-2\big) = z^3 + z + 2 \\
\underline{-\,z^4 + 2z^3} \\
\qquad\qquad\quad z^2 \\
\qquad\quad\underline{-\,z^2 + 2z} \\
\qquad\qquad\qquad 2z - 4 \\
\qquad\qquad\quad\underline{-\,2z + 4} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

liefert $z^4 - 2z^3 + z^2 - 4 = (z-2)(z^3+z+2)$. Wir raten die weitere Nullstelle $z_1 = -1$. Die Polynomdivision

$$\begin{array}{l}
\big(\quad z^3 \qquad\quad + z + 2\big) : \big(z+1\big) = z^2 - z + 2 \\
\underline{-\,z^3 - z^2} \\
\qquad\ -\,z^2 \ + z \\
\qquad\ \underline{\quad z^2 \ + z} \\
\qquad\qquad\quad 2z + 2 \\
\qquad\qquad\underline{-\,2z - 2} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

liefert

$$\begin{aligned}
z^4 - 2z^3 + z^2 - 4 &= (z-2)(z^3+z+2) \\
&= (z-2)(z+1)(z^2-z+2) \\
&= (z-2)(z+1)(z+1)(z-2) \\
&= (z-2)^2(z+1)^2.
\end{aligned}$$

(c) Wir raten die Nullstelle $z_0 = -1$. Das Horner-Schema

$$\begin{array}{r|cccc}
 & 1 & 1 & 2 & 2 \\
 & + & + & + & + \\
z_0 = -1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\
\hline
 & 1 & 0 & 2 & 0
\end{array}$$

liefert

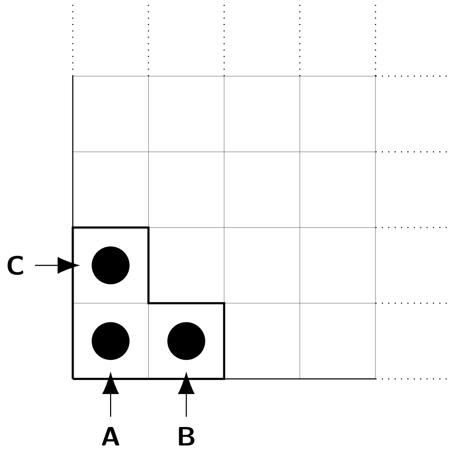
$$z^3 + z^2 + 2z + 2 = (z+1)(1\cdot z^2 + 0\cdot z + 2) = (z+1)(z+i\sqrt{2})(z-i\sqrt{2}).$$

(bitte wenden)

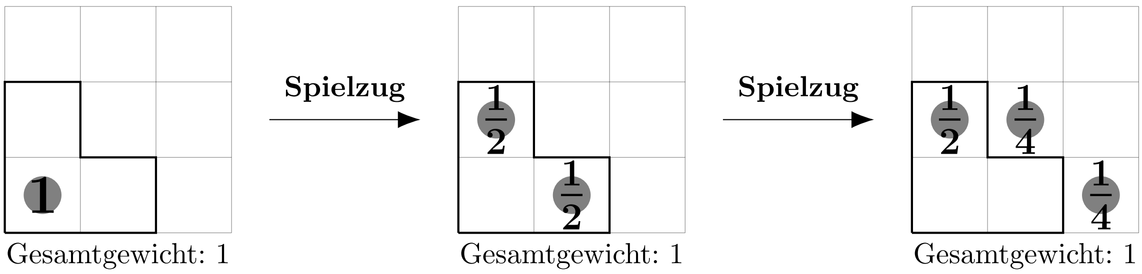
Aufgabe

Es ist nicht möglich, in endlich vielen Zügen alle Spielsteine aus dem Gefängnis zu entfernen.

Anschauliche Begründung: Da sich durch einen Spielzug ein Spielstein *verdoppelt*, stellen wir uns einen Spielstein als Gewichtscheibe vor, dessen Gewicht bei Bewegung zu gleichen Teilen auf die zwei neuen Spielsteine aufgeteilt wird.



Wir geben dem Eckstein **A** das willkürlich gewählte, initiale Gewicht 1. Durch Bewegen dieses Steins (sofern möglich) haben die daraus resultierenden zwei neuen Spielsteine jeweils das Gewicht $\frac{1}{2}$. Da letztere sich auf den Startpositionen der Anfangsspielsteine **B** und **C** befinden würden, geben wir diesen ebenfalls das Gewicht $\frac{1}{2}$.



Somit ist das Gewicht eines Spielsteins durch dessen Position auf dem Spielbrett eindeutig bestimmt und das Schaubild zeigt die Gewichte, die ein Spielstein auf den einzelnen Spielfeldern hat.

Man sieht nun (Induktion nach der Anzahl der Spielzüge), dass sich das Gesamtgewicht G aller auf dem Spielbrett befindlichen Spielsteine durch die Ausführung eines Spielzuges nicht ändert, d.h. G ist invariant unter der Ausführung von Spielzügen.

Befände sich auf jedem Spielfeld des Spielbretts ein Spielstein, so betrüge das Gesamtgewicht dieser **unendlich vielen** Spielsteine Aufgabe 22 (b) zufolge $G = 4$.

Wäre das Gefängnis nach n Spielzügen leer, so befänden sich außerhalb des Gefängnisses nur endlich viele Spielsteine, deren Gewicht wegen den Ausführungen weiter oben echt kleiner als 2 wäre im Widerspruch zur Invarianz des Gesamtgewichts $G = 2$ (die Anfangssteine haben ein Gesamtgewicht von 2) aller Spielsteine.

Erklärung als Video (pebbling a chessboard):

https://www.youtube.com/watch?v=lFQGSGsXbXE