UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M.Sc. Daniel Kraemer

Übungen zur Vorlesung
Mathematik für Naturwissenschaftler I
Wintersemester 2018/2019

Blatt 7 Abgabetermin: 11.12.2018

Aufgabe 25 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$2\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right) = 3x$$

(mindestens) eine Lösung $x \in [0,1]$ besitzt.

Aufgabe 26 (4 Punkte)

Bestimmen Sie alle reellen Zahlen $x \in \mathbb{R}$, für welche die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k$$

konvergiert. Berechnen Sie anschließend für diese x den Wert der Reihe, indem Sie $\left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right)^2$ mit der Cauchy-Produktformel berechnen.

Aufgabe 27 (2+2+4 = 8 Punkte)

Die Hyperbelfunktionen $\cosh(x)$ und $\sinh(x)$ sind definiert durch

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

(a) Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sinh(x \pm y) = \sinh(x)\cosh(y) \pm \cosh(x)\sinh(y).$$

(b) Berechnen Sie die Ableitungen $\frac{d}{dx}\sinh(x)$ und $\frac{d}{dx}\cosh(x)$.

(c) Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sinh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \qquad \cosh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Benutzen Sie dazu die Reihendarstellung der Exponentialfunktion.

(bitte wenden)

Aufgabe 28 **(1+1+1+1=4 Punkte)**

Berechnen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen:

(a) $f\colon (1,\infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \ln(\ln(x))$

(b) $g\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto -\frac{1}{x^4} e^{4x^2+3x+3}$

(c) $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \ln \sqrt{1+\cos^2(x)}$

(d) $j\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^{\sin^2(x)}$

Sie dürfen die Ableitungen von $e^x, \ln(x), \sqrt{x}, \sin(x), \cos(x)$ aus der Schule als bekannt voraussetzen.