UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M.Sc. Daniel Kraemer

Lösungsvorschlag
Übungen zur Vorlesung
Mathematik für Naturwissenschaftler I
Wintersemester 2018/2019

Blatt 7 Abgabetermin: /

Aufgabe 25

Die Funktion

$$f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad x \longmapsto 2\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right) - 3x$$

ist stetig. Weiter gilt

$$f(0) = 2 > 0 > \sqrt{2} - 3 = \frac{2}{\sqrt{2}} - 3 = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - 3 = f(1).$$

Nach dem Zwischenwertsatz (Satz 6.3) gibt es $x \in [0,1]$ mit $f(x) = 0$. Wegen

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right) = 3x$$

hat die gefundene Zahl x die gewünschte Eigenschaft.

Aufgabe 26

Für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{(k+2)x^{k+1}}{(k+1)x^k} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{k+2}{k+1}|x| = |x|.$$

Also konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k$ für alle $x \in (-1,1)$ und divergiert für alle $x \in \mathbb{R}\backslash[-1,1]$ nach dem Quotientenkriterium. Für $x \in \{-1,1\}$ divergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k$ nach Beispiel 7.2 (3), denn in diesem Fall ist $\big((k+1)x^k\big)_{k\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge.

Nach der Cauchy-Produktformel gilt

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^2 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right)^2 = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{k} x^n x^{k-n} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k$$

für alle $x \in (-1,1)$.

(bitte wenden)

Aufgabe 27

(a) Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}
\sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2} \\
&= \frac{1}{4}(e^x e^y + e^x e^{-y} - e^{-x} e^y - e^{-x} e^{-y} \\
&\qquad + e^x e^y - e^x e^{-y} + e^{-x} e^y - e^{-x} e^{-y}) \\
&= \frac{1}{4}(2e^x e^y - 2e^{-x} e^{-y}) \\
&= \frac{1}{2}(e^{x+y} - e^{-(x+y)}) \\
&= \sinh(x+y).
\end{aligned}$$

Ganz analog rechnet man nach, dass $\sinh(x-y) = \sinh(x)\cosh(y) - \cosh(x)\sinh(y)$ gilt.

(b) Mit Hilfe der Rechenregeln für Ableitungen berechnen wir

$$\frac{d}{dx}\sinh(x) = \frac{d}{dx}\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{\frac{d}{dx}e^x - \frac{d}{dx}e^{-x}}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x)$$

bzw.

$$\frac{d}{dx}\cosh(x) = \frac{d}{dx}\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{\frac{d}{dx}e^x + \frac{d}{dx}e^{-x}}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh(x)$$

für $x \in \mathbb{R}$.

(c) Für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sinh(x) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-x)^k}{k!}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} - \frac{(-x)^k}{k!} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

denn

$$\frac{x^k}{k!} - \frac{(-x)^k}{k!} = \begin{cases} \frac{2x^k}{k!}, & k \text{ ungerade} \\ 0, & k \text{ gerade.} \end{cases}$$

Für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-x)^k}{k!}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} + \frac{(-x)^k}{k!} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2x^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!},$$

denn

$$\frac{x^k}{k!} - \frac{(-x)^k}{k!} = \begin{cases} \frac{2x^k}{k!}, & k \text{ gerade} \\ 0, & k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Aufgabe 28

Mit Hilfe der Rechenregeln für Ableitungen berechnen wir

(a)

$$\frac{d}{dx}\ln(\ln(x)) = \frac{1}{\ln(x)} \cdot \frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x\ln(x)},$$

(bitte wenden)

(b)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{x^4}e^{4x^2+3x+3}\right) &= \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{x^4}\right)\cdot e^{4x^2+3x+3} + \left(-\frac{1}{x^4}\right)\cdot\frac{d}{dx}e^{4x^2+3x+3}\\
&= \frac{4}{x^5}e^{4x^2+3x+3} - \frac{1}{x^4}e^{4x^2+3x+3}\cdot\frac{d}{dx}\left(4x^2+3x+3\right)\\
&= \frac{4}{x^5}e^{4x^2+3x+3} - \frac{1}{x^4}e^{4x^2+3x+3}(8x+3)\\
&= e^{4x^2+3x+3}\left(\frac{4}{x^5}-\frac{8}{x^3}-\frac{3}{x^4}\right),
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\ln\sqrt{1+\cos^2(x)} &= \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2(x)}}\cdot\frac{d}{dx}\sqrt{1+\cos^2(x)}\\
&= \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2(x)}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+\cos^2(x)}}\cdot\frac{d}{dx}\left(1+\cos^2(x)\right)\\
&= \frac{1}{2\left(1+\cos^2(x)\right)}\cdot 2\cos(x)\frac{d}{dx}\cos(x)\\
&= -\frac{\cos(x)\sin(x)}{1+\cos^2(x)},
\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}x^{\sin^2(x)} &= \frac{d}{dx}e^{\sin^2(x)\ln(x)}\\
&= e^{\sin^2(x)\ln(x)}\left(\frac{d}{dx}\left(\sin^2(x)\right)\ln(x)+\sin^2(x)\frac{d}{dx}\ln(x)\right)\\
&= e^{\sin^2(x)\ln(x)}\left(2\sin(x)\frac{d}{dx}\left(\sin(x)\right)\ln(x)+\frac{\sin^2(x)}{x}\right)\\
&= e^{\sin^2(x)\ln(x)}\left(2\sin(x)\cos(x)\ln(x)+\frac{\sin^2(x)}{x}\right).
\end{aligned}$$
