UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M.Sc. Daniel Kraemer

Lösungsvorschlag
Übungen zur Vorlesung
Mathematik für Naturwissenschaftler I
Wintersemester 2018/2019

Blatt 8 Abgabetermin: /

Aufgabe 29

Es gilt

(a)
$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\sqrt{1}}{1+\frac{1}{n}-1} = \frac{d}{dx}(\sqrt{x})\Big|_{x=1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\Big|_{x=1} = \frac{1}{2},$$

(b)
$$\lim_{n\to\infty} n\sin\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)-\sin(0)}{\frac{1}{n}-0} = \sin'(0) = \cos(0) = 1,$$

(c)
$$\lim_{n\to\infty} n\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)-1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right)-\cos(0)}{\frac{1}{n}-0} = \cos'(0) = -\sin(0) = 0.$$

Aufgabe 30

Wir berechnen mit Hilfe von Satz 9.11:

(a)
$$r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} 2 = 2,$$

(b)
$$r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n}{n+1}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1,$$

(c)
$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2}{3^n}}{\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}}} = \lim_{n\to\infty} 3\cdot\frac{n^2}{(n+1)^2} = 3\cdot\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^2 = 3,$$

(d)
$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2}^n}{\sqrt{2}^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

(bitte wenden)

Aufgabe 31

(a) Es sei $A(n)$ die Aussage

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\left(\prod_{k=1}^{n-1}(2k-1)\right)(2x)^{-\frac{2n-1}{2}} \quad (x \in (0,\infty)).$$

Induktionsanfang : (Beweis von $A(1)$)

Für $x \in (0,\infty)$ gilt

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}} = (-1)^{1+1}\left(\prod_{k=1}^{1-1}(2k-1)\right)(2x)^{-\frac{2\cdot 1-1}{2}},$$

sodass $A(1)$ richtig ist.

Induktionsschritt : ($A(n) \Rightarrow A(n+1)$)

Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Wir beweisen, dass die **Induktionsvoraussetzung**

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\left(\prod_{k=1}^{n-1}(2k-1)\right)(2x)^{-\frac{2n-1}{2}} \quad (x \in (0,\infty)) \tag{1}$$

die **Induktionsbehauptung**

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+2}\left(\prod_{k=1}^{n}(2k-1)\right)(2x)^{-\frac{2n+1}{2}} \quad (x \in (0,\infty))$$

impliziert. Für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}
f^{(n+1)}(x) &= \frac{d}{dx} f^{(n)}(x) \\
&\overset{(1)}{=} \frac{d}{dx}\left((-1)^{n+1}\left(\prod_{k=1}^{n-1}(2k-1)\right)(2x)^{-\frac{2n-1}{2}}\right) \\
&= (-1)^{n+1}\left(\prod_{k=1}^{n-1}(2k-1)\right)\frac{d}{dx}(2x)^{-\frac{2n-1}{2}} \\
&= (-1)^{n+1}\left(\prod_{k=1}^{n-1}(2k-1)\right)\cdot 2\left(-\frac{2n-1}{2}\right)(2x)^{-\frac{2n-1}{2}-1} \\
&= (-1)^{n+2}\left(\prod_{k=1}^{n}(2k-1)\right)(2x)^{-\frac{2n+1}{2}}.
\end{aligned}$$

Damit haben wir $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ gezeigt.

(bitte wenden)

(b) Es sei $A(n)$ die Aussage

$$(\ln(f_1 \cdot \ldots \cdot f_n))' = \sum_{k=1}^{n} \frac{f_k'}{f_k}.$$

Induktionsanfang : (Beweis von $A(1)$)

Es gilt

$$(\ln(f_1))' = \frac{f_1'}{f_1},$$

sodass $A(1)$ richtig ist.

Induktionsschritt : ($A(n) \Rightarrow A(n+1)$)

Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Wir beweisen, dass die **Induktionsvoraussetzung**

$$(\ln(f_1 \cdot \ldots \cdot f_n))' = \sum_{k=1}^{n} \frac{f_k'}{f_k} \tag{2}$$

die **Induktionsbehauptung**

$$(\ln(f_1 \cdot \ldots \cdot f_{n+1}))' = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{f_k'}{f_k}$$

impliziert. Aus der Produktregel (Satz 9.4 (b)) und der Kettenregel (Satz 9.5) folgt

$$\begin{aligned}
(\ln(f_1 \cdot \ldots \cdot f_{n+1}))' &= \frac{1}{f_1 \cdot \ldots \cdot f_{n+1}} \cdot (f_1 \cdot \ldots \cdot f_{n+1})' \\
&= \frac{1}{f_1 \cdot \ldots \cdot f_{n+1}} \cdot \big((f_1 \cdot \ldots \cdot f_n)' \cdot f_{n+1} + (f_1 \cdot \ldots \cdot f_n) f_{n+1}'\big) \\
&= \frac{(f_1 \cdot \ldots \cdot f_n)'}{f_1 \cdot \ldots \cdot f_n} + \frac{f_{n+1}'}{f_{n+1}} \\
&= (\ln(f_1 \cdot \ldots \cdot f_n))' + \frac{f_{n+1}'}{f_{n+1}} \\
&\overset{(2)}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{f_k'}{f_k} + \frac{f_{n+1}'}{f_{n+1}} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{f_k'}{f_k}.
\end{aligned}$$

Damit haben wir $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ gezeigt.

Aufgabe 32

Für $c \in \mathbb{R}$ ist das Polynom p_c differenzierbar mit Ableitung

$$p_c'(x) = 12x^2 - c \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Wegen

$$p_c'(1) = 4 \quad \Leftrightarrow \quad 12 - c = 4 \quad \Leftrightarrow \quad c = 8$$

hat p_c mit $c = 8$ die gewünschte Eigenschaft.
