UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M.Sc. Daniel Kraemer

Lösungsvorschlag
Übungen zur Vorlesung
Mathematik für Naturwissenschaftler I
Wintersemester 2018/2019

Blatt 9 Abgabetermin: /

Aufgabe 33

(a) Die Funktion f ist dreimal differenzierbar als Zusammensetzung differenzierbarer Funktionen (siehe Beispiel 9.2 und Satz 9.4 + 9.5) mit

$$f'(x) = 2e^{1-x}(1-x), \quad f''(x) = -2e^{1-x}(2-x), \quad f'''(x) = 2e^{1-x}(3-x)$$

für $x \in \mathbb{R}$. Wegen

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$$

und $f''(1) = -2 < 0$ hat f nach Satz 10.8 (ii) genau im Punkt $x = 1$ ein lokales Maximum. Wegen

$$f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2 - x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2$$

und $f'''(2) = 2e^{-1} > 0$ hat f nach Satz 10.8 (i) und Definition 10.9 genau im Punkt $x = 2$ einen Wendepunkt.

(b) Wegen

$$2xe^{1-x} \leq 2x$$

für $x < 0$ und $\lim_{x\to-\infty} 2x = -\infty$ folgt

$$\lim_{x\to-\infty} 2xe^{1-x} = -\infty.$$

Weiter folgt mit der Regel von L'Hospital, dass

$$\lim_{x\to\infty} 2xe^{1-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^{x-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^{x-1}} = 0.$$

Aufgabe 34

Ist $a = 0$, so gilt $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. In diesem Fall besitzt die Funktion f für jede Wahl des Parameters $b \in \mathbb{R}$ ein lokales Maximum im Punkt $x_0 = 2$ (siehe Definition 10.1 (b)).

Seien nun $a \neq 0$ und $b \in \mathbb{R}$. Dann ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad x \longmapsto a(x+b)e^{-x}$$

zweimal differenzierbar mit

$$f'(x) = ae^{-x}(1-x-b) \quad \text{und} \quad f''(x) = ae^{-x}(x+b-2)$$

(bitte wenden)

für $x \in \mathbb{R}$. Wegen

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - x - b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 - b$$

und $f''(1-b) = -ae^{b-1}$ hat f im Punkt $x = 1-b$ genau dann ein lokales Maximum, wenn $a > 0$ gilt. Insgesamt folgt, dass die Funktion f für

$$(a = 0 \text{ und } b \in \mathbb{R}) \qquad \text{oder} \qquad (a \in (0, \infty) \text{ und } b = -1)$$

ein lokales Maximum in $x_0 = 2$ hat.

Aufgabe 35

Die Funktionen f, g und h sind differenzierbar als Zusammensetzung differenzierbarer Funktionen.

(a) Es gilt

$$f'(x) = 2x - 3 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

und wegen

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{3}{2}$$

und

$$f'(x) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < \frac{3}{2} \qquad \text{bzw.} \qquad f'(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > \frac{3}{2}$$

ist f nach Satz 10.6 monoton fallend auf $(-4, \frac{3}{2}]$ und monoton wachsend auf $[\frac{3}{2}, \infty)$. Also besitzt f in $x = \frac{3}{2}$ ein lokales Minimum.

(b) Es gilt

$$g'(x) = (x-1)e^{-x} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

und wegen

$$g'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$$

und

$$g'(x) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < 1 \qquad \text{bzw.} \qquad g'(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > 1$$

ist g nach Satz 10.6 monoton fallend auf $(-2, 1]$ und monoton wachsend auf $[1, 2)$. Also besitzt g in $x = 1$ ein lokales Minimum.

(c) Es gilt

$$h'(x) = x(2\ln(x) + 1) \quad \text{für } x \in (0, \infty)$$

und wegen

$$h'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\ln(x) + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

und

$$h'(x) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < \frac{1}{\sqrt{e}} \qquad \text{bzw.} \qquad h'(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > \frac{1}{\sqrt{e}}$$

ist h nach Satz 10.6 monoton fallend auf $(0, \frac{1}{\sqrt{e}}]$ und monoton wachsend auf $[\frac{1}{\sqrt{e}}, \infty)$. Also besitzt h in $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ ein lokales Minimum.

(bitte wenden)

Aufgabe 36

(a) Die Funktionen
$$f\colon \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad x \longmapsto e^{-x^2}-1$$
und
$$g\colon \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad x \longmapsto \sin(x)$$
sind differenzierbar mit $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = \lim_{x\to 0} g(x)$ und $g'(x) = \cos(x) \neq 0$ für alle $x \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Da
$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{-2xe^{-x^2}}{\cos(x)} = 0$$
gilt, folgt aus der Regel von L'Hospital (Satz 10.11), dass
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^2}-1}{\sin(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = 0.$$

(b) Die Funktionen
$$f\colon (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad x \longmapsto \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$
und
$$g\colon (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad x \longmapsto \frac{1}{x}$$
sind differenzierbar mit $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 = \lim_{x\to\infty} g(x)$ und $g'(x) = -\frac{1}{x^2} \neq 0$ für alle $x \in (0,\infty)$. Da
$$\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1$$
gilt, folgt aus der Regel von L'Hospital (Satz 10.11), dass
$$\lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = 1.$$

(c) Die Funktionen
$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad x \longmapsto 2\cos(x)+e^x+e^{-x}-4$$
und
$$g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad x \longmapsto x^4$$
sind 4-mal differenzierbar mit
$$\begin{aligned}
f^{(1)}(x) &= -2\sin(x)+e^x-e^{-x}, & g^{(1)}(x) &= 4x^3\\
f^{(2)}(x) &= -2\cos(x)+e^x+e^{-x}, & g^{(2)}(x) &= 12x^2\\
f^{(3)}(x) &= 2\sin(x)+e^x-e^{-x}, & g^{(3)}(x) &= 24x\\
f^{(4)}(x) &= 2\cos(x)+e^x+e^{-x}, & g^{(4)}(x) &= 24 \neq 0
\end{aligned}$$
für $x \in \mathbb{R}$. Wegen
$$\lim_{x\to 0} f^{(i)}(x) = 0 = \lim_{x\to 0} g^{(i)}(x)$$
für $i = 1,2,3$ und
$$\lim_{x\to 0}\frac{f^{(4)}(x)}{g^{(4)}(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{2\cos(x)+e^x+e^{-x}}{24} = \frac{1}{6}$$
folgt aus der Regel von L'Hospital (Satz 10.13), dass
$$\lim_{x\to 0}\frac{2\cos(x)+e^x+e^{-x}-4}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{f^{(4)}(x)}{g^{(4)}(x)} = \frac{1}{6}.$$