UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M.Sc. Daniel Kraemer

Klausurvorbereitungsblatt zur Vorlesung
Mathematik für Naturwissenschaftler I
Wintersemester 2018/2019

Die Bearbeitung der Aufgaben auf diesem Klausurvorbereitungsblatt ist freiwillig. Die hier gestellten Aufgaben sollen Ihnen als zusätzliche Übung dienen. Es erfolgt keine Abgabe bzw. Bepunktung Ihrer Lösungen. Eine Besprechung dieses Vorbereitungsblattes findet am Freitag den 8. Februar ab 8:30 Uhr in Hörsaal II (Geb. E2.5) statt. Hier haben Sie auch noch einmal die Gelegenheit Fragen zu stellen.

Aufgabe 1

(a) Geben Sie folgende Mengen durch Aufzählen Ihrer Elemente an:

(1) $\{2,4\} \times (\{1,4\} \cap \{4,5\})$ (2) $\{(a,b) \in \mathbb{N} \mid a \cdot b \leq 4\}$

(b) Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen in Polarkoordinaten, d.h. in der Form $re^{i\theta}$ ($r > 0$, $\theta \in [0, 2\pi)$):

(1) i (2) $1 - i$

Aufgabe 2

Betrachten Sie ein Rennen mit 5 durchnummerierten Läufern.

(a) Wie viele mögliche Rennergebnisse gibt es?

(b) Bei wie vielen möglichen Rennergebnissen belegt der Läufer mit der Nr. 1 den ersten Platz vor dem Läufer mit der Nr. 2 auf dem zweiten Platz?

Aufgabe 3

Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$$

für alle $n \geq 1$ gilt.

(bitte wenden)

Aufgabe 4

(a) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(1) $\lim_{n\to\infty} \frac{4n^3 + 18n^2 - 1}{3n^3 - 7n}$ (2) $\lim_{n\to\infty} n \arctan\left(\frac{1}{n}\right)$

(b) Prüfen Sie nach, dass die Regel von L'Hospital zur Bestimmung des folgenden Grenzwerts verwendet werden kann und berechnen Sie anschließend den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x)}{\sin(x)}.$$

(c) Bestimmen Sie alle reellen Zahlen $x \in \mathbb{R}$, für welche die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{3}^k x^k.$$

konvergiert. Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 5

Verwenden Sie den Zwischenwertsatz, um zu begründen, dass die Gleichung

$$\cos(x) + \sin(x) = \frac{1}{2}$$

(mindestens) eine Lösung $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ besitzt.

Aufgabe 6

Untersuchen Sie, in welchen Punkten die folgende Funktion stetig ist:

$$f\colon [-4,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad x \longmapsto \begin{cases} x, & x \in [-4,-1] \\ x^3, & x \in (-1,0] \\ 4, & x \in (0,\infty). \end{cases}$$

Aufgabe 7

Bestimmen Sie mit Hilfe des Horner-Schemas den Wert des Polynoms $4x^3 - 2x^2 - 4x + 1$ an der Stelle $x = -3$.

Aufgabe 8

Diskutieren Sie die Funktion

$$f\colon (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad x \longmapsto x\ln(x)$$

und skizzieren Sie den Funktionsgraphen von f in einem geeigneten Koordinatensystem. (*Hinweis : Orientieren Sie sich an Aufgabe 38 auf Blatt 10.*)

(bitte wenden)

Aufgabe 9

(a) Berechnen Sie mit Hilfe der geometrischen Reihe die Taylorreihe der Funktion

$$f\colon (-2,2) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad x \longmapsto \frac{1}{2-x}$$

im Punkt $x_0 = 0$.

(b) Berechnen Sie die erste Ableitung der folgenden differenzierbaren Funktionen:

(i) $f\colon (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto (x\ln(x))^2$

(ii) $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \cos(\sin(x)) - 2x^2$

(iii) $h\colon (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x^x \arctan(x)$

Aufgabe 10

(a) Man lasse den Graphen der Funktion

$$f\colon [2, e+1] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad x \longmapsto \frac{\sqrt{2x-2}}{x-1}$$

um die x-Achse rotieren und erhalte so den Rotationskörper $R(f)$. Berechnen Sie das Volumen V von $R(f)$.

(b) Berechnen Sie das uneigentliche Integral

$$\int_0^e x\ln(x)dx.$$