§8

Spezielle Funktionen

werden in diesem Abschnitt definiert, also insbesondere Exponentialfunktion, Logarithmusfunktion , die trigonometrischen Funktionen sowie weitere wichtige Funktionen, die mit $\exp, \log, \sin, \cos \ldots$ in Zusammenhang stehen. Dabei beschränken wir uns in der Regel auf den reellen Fall, die vollständige Diskussion der speziellen Funktionen für komplexe Argumente erfolgt im Rahmen der Funktionentheorie.

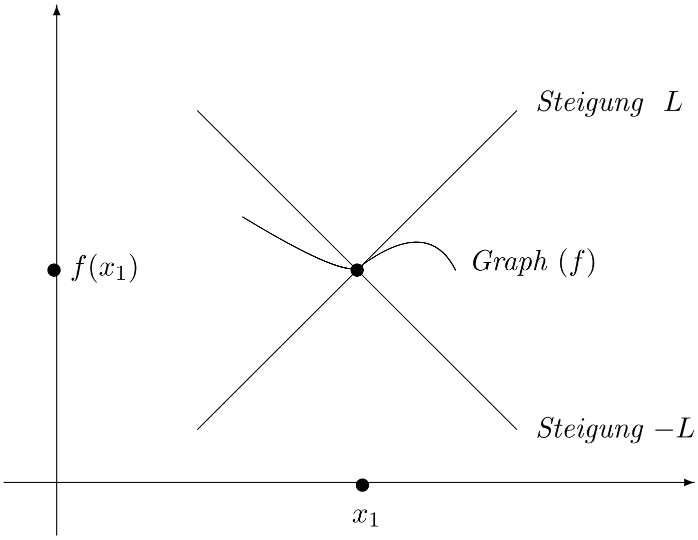
Wie wir gleich sehen werden, haben die meisten speziellen Funktionen die folgende angenehme Eigenschaft, die uns in §9 sofort die Stetigkeit der Funktionen liefert.

Definition 8.1 *: Sei* $D \subset \mathbb{C}$ *eine Kreisscheibe* $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ *heißt* *Lipschitz (-stetig)* *oder* *dehnungsbeschränkt* *auf* $D \Longleftrightarrow$

$$\exists\, L \in (,0,\infty) : \quad |\, f(z_1) - f(z_2) \,| \quad \leq \quad L \cdot |z_1 \cdot z_2| \quad \forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{D}$$

analoge Definition $I \subset \mathbb{R}$ *Intervall,* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *(oder* $\mathbb{C}$)

Interpretation für $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$



Beispiele:

1) $f(z) := |z|,\ z \in \mathbb{C}$ erfüllt

$$|\, f(z_1) - f(z_2)\,| \quad = \quad |\, |z_1| - |z_2|\, | \quad \leq \quad |z_1 - z_2|,$$

man kann $L = 1$ wählen.

2) Sei $f(z) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ konvergent auf $D_R(0)$.

Behandlung: Für jedes $r < R$ gibt es $L = L_r$ mit $|\, f(z) - f(w)\,| \leq L \cdot |z - w|$ auf $D_r(0)$

Beweis:

$$|\, f(z) - f(w)\,| \quad = \quad \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z^n - w^n) \right| \quad =$$

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot (z - w) \cdot (z^{n-1} + z^{n-2}w + \ldots + w^{n-1}) \right| \quad \leq$$

$$|z - w| \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \cdot n \cdot r^{n-1}$$

für alle $z, w \in D_r(0)$. Mit $\alpha_n := |a_n| \cdot n \cdot r^{n-1}$ gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha_n} \quad = \quad \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot r \quad =: \quad \vartheta \cdot r$$

und da die Ausgangsreihe auf $D_{1/\vartheta}(0)$ konvergiert und somit $R < 1/\vartheta$ ist*, folgt: $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha_n} < \frac{1}{R} \cdot r < 1$, also Konvergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| \cdot n \cdot r^{n-1}$ nach dem Wurzelkriterium.

($*$ wir nehmen ja Konvergenz auf $D_R(0)$ an, was $R < 1/\vartheta$ liefert.)

Setzt man $L := \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| \cdot n \cdot r^{n-1}$, , so folgt die Beh. □

3) Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(t) := \sqrt{t}$.

Diese Funktion ist <u>nicht Lipschitz</u> auf $[0,1]$. Dazu muß man zeigen:

Zu jeder Vorgabe von $K > 0$ gibt es $x, y \in [0,1]$ mit $| f(x) - f(y) | > K \cdot |x - y|$.
Sei $x = 0$, $y_n := 1/n$ $\Longrightarrow$ $| f(x) - f(y_n) | = \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \cdot \frac{1}{n} = \sqrt{n} \cdot |y_n - x|$.
Zu $K > 0$ wählt man n so groß , dass $\sqrt{n} > K$ ist.

Bemerkung: $\sqrt{\cdot}$ ist Lipschitz auf Intervallen $[\alpha, \beta]$ mit $0 < \alpha < \beta < \infty$.

Satz 8.1 : <u>*Zwischenwertsatz für Lipschitz Funktionen*</u>

> *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Lipschitz. Dann gibt es zu jeder Zahl c zwischen $f(a)$ und $f(b)$ ein $x \in [a,b]$ mit $f(x) = c$.*

Beweis: - (später allgemeiner)

Bemerkungen:

1) $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(t) = \begin{cases} -1, t \leq 0 \\ 1, t > 0 \end{cases}$,

hat die Zwischenwerteigenschaft nicht.

2) <u>(Nullstellen von Polynomen ungeraden Grads)</u> Beispiel:

$f : R \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

Beh.: $\exists\, x_\circ \in \mathbb{R}$ mit $f(x_\circ) = 0$

Beweis: beachte $\lim\limits_{n\to+\infty} f(-n) = -\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = +\infty$

$\Longrightarrow \quad \exists\, N \quad \text{mit} \quad f(-N) < 0 < f(N)$

Zeige, dass f auf $[-N, N]$ Lipschitz Funktion ist und wende ZWS 8.1 an.

□

I. Potenzen mit reellen Exponenten

bekannt: $a \in \mathbb{R}^+, \quad r \in \mathbb{Q} \quad \longrightarrow \quad a^r$ Potenz mit rat. Exp.

Eigenschaften:

(i) Monotonie: $[0,\infty) \ni x \mapsto x^r$ streng wachsend für $r \in \mathbb{Q}^+$

$(0,\infty) \ni x \mapsto x^s$ streng fallend für $s \in \mathbb{Q}$, $s < 0$

(ii) $$\left.\begin{array}{l} \text{Seien} \quad r, s \in \mathbb{Q},\ r < s \\ x^r < x^s, \quad \text{falls } x > 1 \\ x^r > x^s, \quad \text{falls } 0 < x < 1 \end{array}\right\}$$ "Monotonie bzgl. des Exponenten bei fester Basis"

(iii) Sei $x > 0$ und $m \in \mathbb{N}$. Dann gibt es ein $L > 0$ mit

$$|x^r - x^s| \quad \leq \quad L \cdot |r - s| \text{ für alle } r, s \in \mathbb{Q} \cap [-m, m].$$

Bemerkungen: (iii) ist eine Art Lipschitz Bedingung für $s \mapsto x^s$, $\underline{s \in \mathbb{Q}}$. Wir werden diese Eigenschaft zur Definition von $x^t, t \in \mathbb{R}$, benutzen.

Beweis von (iii):

Fall 1: $\underline{x > 1}$ Ohne Einschränkung sei $\underline{r < s}$.

Hilfsungleichung: $\boxed{\text{Für beliebiges} \quad t \in \mathbb{Q}^+ \quad \text{gilt} \quad * \quad x^t - 1 < x^{t+1} \cdot t}$

benutzt $*$ mit $t = s - r \quad \Longrightarrow$

$$x^{s-r} - 1 < (s-r)\, x^{s-r+1} \quad \Big| \cdot x^r \quad \Longrightarrow$$

$$0 < x^s - x^r < (s-r)\, x^{s+1} \leq (s-r)\, x^{m+1}$$

$\Longrightarrow$ Beh. mit $L := x^{m+1}$.

Fall 2: $\underline{0 < x < 1}$ $\quad (x = 1 \quad \text{trivial!})$

Dann ist $\quad y = 1/x > 1 \quad$ und nach Fall 1 $\quad \left|y^{-r} - y^{-s}\right| \leq$

$$L \cdot |\,(-r) - (-s)\,| \quad = \quad L \cdot |r - s|$$

denn mit $r, s \in [-m, m] \cap \mathbb{Q}$ gehören auch $-r, -s$ zu diesem Bereich.

Nun ist $\quad |y^{-r} - y^{-s}| \quad = \quad |x^r - x^s|.$ $\square$

Zur Hilfsungleichung:

Behandlung: $\quad t \in \mathbb{Q}^+,\, x > 1 \quad \Longrightarrow \quad x^t - 1 \leq t \cdot x^{t+1}$

Beweis: 1) $\quad t \geq 1 \quad \Longrightarrow \quad x^t - 1 < x^t \leq t \cdot x^t < t \cdot x^{t+1}$ (da $x > 1$!)

2) $\quad 0 < t < 1$: $\quad$ schreibe $\quad t = p/n \quad$ mit $\quad p, n \in \mathbb{N}, p < n$

$$\Longrightarrow \quad x^t = \sqrt[n]{x^p} \quad = \quad \sqrt[n]{\underbrace{x \dots x}_{p \text{ fach}} \quad \underbrace{1 \dots 1}_{n-p \text{ fach}}} \quad \leq \quad \text{(allg. Ungl. arith. geom. M.)}$$

$$\frac{1}{n}\,(p \cdot x + n - p) \quad = \quad 1 - t + tx \quad = \quad 1 + t(x-1).$$

also: $\quad x^t - 1 < t\,(x-1) < t \cdot x < t \cdot x^{t+1} \quad$ wegen $\quad x > 1.$ $\square$

$$\left[\sqrt[n]{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \dots \alpha_n} \quad \leq \quad \tfrac{1}{n}\,(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)\right] \leftarrow \quad \text{Induktion nach } n \text{ (alle } \alpha_i \geq 0)$$

Satz 8.2 *und*

Definition 8.2 *:*

Sei $\quad a > 0.\quad$ *Ist* $\quad x \in \mathbb{R} \quad$ *und* $\quad \{x_n\}$ *eine Folge in* $\mathbb{Q}$ *mit* $x_n \longrightarrow x$*, so existiert*

$$\lim_{n \to \infty} a^{x_n}$$

und hängt nicht von der speziellen Wahl der gegen x konvergenten rationalen Folge ab.

Wir schreiben: $\quad \boxed{a^x := \lim_{n \to \infty} a^{x_n}.}$

$\mathbb{R} \ni x \mapsto a^x \in \mathbb{R}$ *heißt allgemeine Exponentialfunktion.*
(zur Basis a)

Es gelten die Potenzgesetze

$$\left|\begin{array}{lclclcl} a^{x+y} & = & a^x \cdot a^y & & \longleftarrow & & \underline{\text{Funktionalgleichung der Exponentialfunktion}} \\ a^x b^x & = & (a\cdot b)^x, & (a^x)^y & = & a^{xy}, & \\ a^{x-y} & = & a^x/a^y, & a^x/b^x & = & (a/b)^x & \end{array}\right.$$

für alle $\quad a,b>0 \quad$ und $\quad x,y\in\mathbb{R}$

Beweis: Zu beweisen ist nur der erste Teil des Satzes, die Potenzgesetze gelten dann vermöge Approximation. Sei 0.E. $a<1.$

Sei $x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$; wähle $r_n\in(x-\frac{1}{n},x-\frac{1}{n+1})\cap\mathbb{Q}$,

also $r_n\nearrow x$. $\quad a>1 \implies \{a^{r_n}\}$ ist monoton wachsend und beschränkt, z.B. $a^{r_n}<a^\ell$,

wenn $\ell\in\mathbb{N}$ mit $\ell>x$.

$$\implies \quad \eta := \lim_{n\to\infty} a^{r_n} \quad \text{existiert}$$

Sei $\{s_n\}$ eine weitere Folge mit $s_n\longrightarrow x$. $\implies r_n-s_n\in[-1,1]\cap\mathbb{Q}$ für große n, also nach (iii) von vorhin

$$|a^{r_n-s_n}-a^\circ| \;\le\; L\cdot|r_n-s_n| \underset{n\to\infty}{\Longrightarrow} a^{r_n-s_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

$$\implies \quad a^{s_n}=a^{s_n-r_n}\cdot a^{r_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \eta.$$

Damit ist die Wohldefiniertheit von a^x bewiesen.

Für $\mathbb{R}\ni x\mapsto a^x$, $\quad a>0$, $\quad$ hat man folgende Lipschitz Bedingung:

$$\boxed{\forall\, m\in\mathbb{N} \quad \exists\, L>0 \quad \text{mit} \quad |a^x-a^y| \le L|x-y| \quad \text{für alle} \quad x,y\in[-m,m],}$$

denn dies ist richtig für $x,y\in\mathbb{Q}\cap[-m,m]$ und überträgt sich durch Approximation auf $x,y\in[-m,m]$.

Bemerkungen: 1) Für $a>0$ heißt $\mathbb{R}\ni x\mapsto a^x$ allgemeine Exponentialfunktion, da die Variable x im Exponenten steht und die Basis a fixiert ist.

2) Sei $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$.

$$[0,\infty) \ni x \;\mapsto\; x^\alpha\,(0^\alpha := 0),\;\alpha > 0$$

$$(0,\infty) \ni x \;\mapsto\; x^\alpha,\;\alpha < 0 \quad \text{(dann muß man 0 aus den Def. bereich herausnehmen)}$$

heißt <u>allgemeine Potenzfunktion</u>.

Zusammenfassend ergibt sich jetzt:

Satz 8.3 *:* *<u>Monotonie von Exponential- und Potenzfunktion</u>*

i) $a > 1:$ $\mathbb{R} \ni x \mapsto a^x$ *streng wachsend*

ii) $0 < a < 1:$ $\mathbb{R} \ni x \longrightarrow a^x$ *ist streng fallend*

iii) $\alpha > 0:$ $[0,\infty) \ni x \mapsto x^\alpha$ *ist streng wachsend*

iv) $\alpha < 0:$ $(0,\infty) \ni x \mapsto x^\alpha$ *ist streng fallend*

Außerdem gilt:

v) $x \mapsto a^x$ *ist Lipschitz auf jedem beschränkten Intervall.*

vi) $x \mapsto x^\alpha$ *ist Lipschitz auf jedem Intervall* $[A,B]$ *mit* $A > 0$.

Beweis: i) h reell > 0; wähle $\tau \in [\frac{h}{3}, \frac{h}{2}]$ rational

und Folge $h_n \in \mathbb{Q}$ mit $h_n \nearrow h$, O.E. $h_n \geq \tau$

$\Longrightarrow$ $(a > 1,$ Monotonie auf $\mathbb{Q})$ $a^{h_n} > a^\tau > 1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a^h \geq a^\tau > 1$

also $a^h > 1$. Seien $x < y$ aus $\mathbb{R}$, setze $h := y - x > 0$

$\Longrightarrow$ $a^{y-x} > 1$ $\Longrightarrow$ (Potenzgesetze aus Satz 8.1). $a^y > a^x$.

ii) benutze i) mit $1/a > 1$ statt a

iii) $0 < x < y$ $\Longrightarrow$ $\frac{y}{x} > 1 \underset{\text{i)}}{\Longrightarrow}$ $(\frac{y}{x})^\alpha > (\frac{y}{x})^\circ$ (da $\alpha > 0$)

d.h. $y^\alpha > x^\alpha$ nach den Potenzgesetzen.

iv) betrachte $x \mapsto x^{-\alpha}$

v) haben wir bewiesen (vgl. p. 107)

vi) Sei $\alpha > 0$. Wir zeigen: $|x^\alpha - y^\alpha| \leq C \cdot |x - y|$ auf $[A, B],\ A > 0$.

1^{ter} Schritt: $n, m \in \mathbb{N}$

$(\varepsilon = x - 1 > 0)$

$$x > 1 :\ 0 < x^{\frac{n}{m}} - 1 = (1+\varepsilon)^{\frac{n}{m}} - 1$$

$$= \Big[(1+\varepsilon)^{\frac{1}{m}} \Big]^n - 1^n = \Big\{(1+\varepsilon)^{\frac{1}{m}} - 1\Big\} \cdot \Big\{(1+\varepsilon)^{\frac{n-1}{m}} + (1+\varepsilon)^{\frac{n-2}{m}} + \ldots + 1\Big\}$$

$$\leq \Big\{(1+\varepsilon)^{\frac{1}{m}} - 1\Big\} \cdot n \cdot (1+\varepsilon)^{\frac{n}{m}}$$

Bernoulli:

$$1 + \varepsilon = 1 + m \cdot \frac{\varepsilon}{m} \leq (1 + \frac{\varepsilon}{m})^m \implies (1+\varepsilon)^{\frac{1}{m}} \leq 1 + \frac{\varepsilon}{m}$$

Einsetzen: $0 < x^{\frac{n}{m}} - 1 \leq (x-1)\,\frac{n}{m}\ x^{\frac{n}{m}}$

2^{ter} Schritt: α reell > 0

$\implies$ wähle rationale Folge $\alpha_k \to \alpha,\ \alpha_k > 0$, Schritt 1 ergibt:

$$0 < x^\alpha - 1 \leq (x-1)\,\alpha \cdot x^\alpha \qquad \forall\, x > 1 \text{ (offenbar auch für } x = 1)$$

3^{ter} Schritt: Seien $x, y \in [A, B]$, 0. E. $y \geq x$.

Dann ist

$$0 \leq y^\alpha - x^\alpha = x^\alpha \cdot \Big((\tfrac{y}{x})^\alpha - 1 \Big) \overset{\text{s.o.}}{\leq}$$

$$x^\alpha \cdot \Big((\tfrac{y}{x}) - 1 \Big)\, \alpha (\tfrac{y}{x})^\alpha = y^\alpha \cdot \alpha \cdot x^{-1}(y - x) \leq$$

$$\alpha \cdot B^\alpha \cdot A^{-1}(y - x)$$

Damit ist die Lipschitz Bedingung im Falle $\alpha > 0$ nachgewiesen.

Sei $\alpha < 0$. Dann ist für $x, y \in [A, B]$

$$\Big| x^\alpha - y^\alpha \Big| = \Big| (\tfrac{1}{x})^{-\alpha} - (\tfrac{1}{y})^{-\alpha} \Big| \underset{\text{s.o.}}{\overset{-\alpha>0}{\leq}}$$

$$(-\alpha)\ B^{-\alpha}\ A^{-1}\ |\tfrac{1}{x} - \tfrac{1}{y}| = (-\alpha)\ \tfrac{1}{xy}\ B^{-\alpha} \cdot A^{-1}\ |x - y| \leq$$

$$(-\alpha)A^{-3}B^{-\alpha}\ |x - y|$$

□

II. Logarithmus und Exponentialfunktion (zur Basis e)

$x \mapsto e^x$ ist streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}$ mit $e^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, $e^{-n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Nach dem Z.W.S. 8.1 folgt

$$\{e^x : x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^+,$$

so dass $\exp: \mathbb{R} \to (0, \infty)$ bijektiv ist. Die Umkehrfunktion heißt natürlicher Logarithmus $ln : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$. Bevor wir diese untersuchen, stellen wir nochmals die wichtigen Eigenschaften der Exponentialfunktion zur Basis e (kurz e-Funktion) zusammen.

Satz 8.4 *:* *(Exponentialfunktion* exp*)*

Die Funktion $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\exp(x) := e^x$, *erfüllt*

(1) Funktionalgleichung: $\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y) \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$

(2) $1 + x \leq \exp(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

(3) $\exp(x) \leq \frac{1}{1-x} \quad \forall\, x \in (-\infty, 1)$

(4) exp *ist streng wachsend*

(5) exp *ist Lipschitz auf* $(-\infty, a] \quad \forall\, a \in \mathbb{R}$.

(6) exp *ist bijektiv* $\mathbb{R} \to (0, \infty)$.

Bemerkung: Man kann zeigen, dass jede Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit (1), (2) gleich exp sein muß. (später, wenn wir $e^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$ beweisen)

Beweis: (1), (4), (6) erledigt!

(2) für $x \leq -1$ ist $e^x \geq 1 + x$ klar, denn $e^x > 0, 1 + x \leq 0$.

Sei $x \geq -1$. Nach Bernoulli ist für $n \in \mathbb{N}$

$$1 + x \quad \leq \quad (1 + \frac{x}{n})^n \quad =: \quad a_n$$

Wir untersuchen $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$:

Behauptung: $\boxed{\lim\limits_{n \to \infty} (1 + \frac{x}{n})^n = e^x}$ (gilt für alle $x \in \mathbb{R}$!)

Beweis: Sei $x > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq x$.
Wähle dazu das $m \in \mathbb{N}$ mit $mx \leq n < (m+1)x$. $\Longrightarrow$

$$* \quad (1 + \frac{1}{m+1})^{mx} \quad \leq \quad (1 + \frac{x}{n})^n \quad \leq \quad (1 + \frac{1}{m})^{(m+1) \cdot x}.$$

Es gilt $\quad (1 + \frac{1}{m})^{(m+1)x} \quad = \quad (1 + \frac{1}{m})^x \cdot \left[(1 + \frac{1}{m})^m \right]^x$

Hilfsaussage: Sei $\alpha > 0$ und $\alpha_k \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} \alpha \quad \Longrightarrow \quad \alpha_k^x \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} \alpha^x$

(vgl. Satz 8.2 vi.; Lipschitz Stetigkeit von $t \to t^x$ auf $[A, B]$ mit $A > 0$)

Nach der Hilfsaussage ist

$$(1 + \frac{1}{m})^x \quad \longrightarrow \quad 1 \qquad \text{bei } n \to \infty \text{ (beachte: } \; n \to \infty \Longrightarrow m \to \infty)$$

und

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{mx} \quad \longrightarrow \quad e^x \qquad \text{bei } n \to \infty$$

sowie

$$\left(1 + \tfrac{1}{m+1}\right)^{mx} \quad = \quad \left(1 + \tfrac{1}{m+1}\right)^{(m+1)x} \quad \cdot \quad \left\{\left(1 + \tfrac{1}{m+1}\right)^{-1}\right\}^x$$

$$\longrightarrow \quad e^x \quad \cdot \quad 1 \quad = \quad e^x \quad \text{bei } n \to \infty.$$

Die Einschachtelung $\quad * \quad$ ergibt $\quad \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^x.$

Ist $\quad x<0, \quad$ so folgt: $\quad \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \longrightarrow e^{-x} \quad$ nach dem Bewiesenen.

Andererseits: $\quad \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \cdot \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \quad = \quad \left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n \quad < \quad 1$

für $\quad n>|x| \quad$ und

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \cdot \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \quad = \quad \left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n \quad \geq \quad 1-\frac{x^2}{n}$$

nach Bernoulli. $\quad$ Es folgt:

$$\underset{\substack{\downarrow\\ e^{+x}}}{\frac{1}{(1-\frac{x}{n})^n}} \quad > \quad \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \quad \geq \quad \underbrace{\frac{1}{(1-\frac{x}{n})^n}\left(1-\frac{x^2}{n}\right)}_{\substack{\downarrow\\ e^x}}$$

Daher ist $\quad e^x = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \quad \forall\, x\in\mathbb{R}.$

Für $\quad x\geq -1 \quad$ haben wir $\quad 1+x \leq \left(1+\frac{x}{n}\right)^n, \quad$ damit ist (2) gezeigt.

(3) $\quad$ Nach (2) ist

$$e^{-x} \quad \geq \quad 1-x \quad \Longrightarrow \quad e^x \quad \leq \quad \frac{1}{1-x}.$$

(5) $\quad$ Auf p.105 haben wir für <u>rationale $s>r$</u> bewiesen:

$$e^s - e^r \quad \leq \quad (s-r)e^{s+1}$$

(setze in der dortigen Rechnung $x=e$). $\quad$ Sind $r,s\in(-\infty,a], \quad$ so folgt:

$$0 \quad \leq \quad e^s-e^r \quad \leq \quad (s-r)e^{a+1} \quad \Longrightarrow \quad |e^s-e^r| \quad \leq \quad e^{a+1}|s-r| \qquad \forall\, s,r\in\mathbb{Q}\cap(-\infty,a]$$

Sind $x,y\in(-\infty,a]$, so betrachtet man rationale Folgen $s_n\to x, r_n\to y$ und benutzt die Definition $\quad e^x = \lim\limits_{n\to\infty} e^{s_n}$, um

$$|e^x-e^y| \quad \leq \quad e^{a+1}\,|x-y|$$

zu schließen. $\square$

Definition 8.3 *Die Umkehrfunktion* $\exp^{-1}: \quad (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ *zur Exponentialfunktion* exp *heißt* <u>*natürlicher Logarithmus*</u> *oder* <u>*Logarithmus zur Basis* e</u>. *Man schreibt* ln *oder* log *für diese Funktion.*

Satz 8.5 *:* <u>*(Eigenschaft von* ln*)*</u>

(1) Funktionalgleichung: $\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y \quad \forall\, x, y > 0$

(2) $1 - \frac{1}{x} \quad \leq \quad \ln x \quad \leq \quad x - 1 \quad \forall\, x > 0$

(3) ln *ist streng monoton wachsend*

(4) ln *ist Lipschitz auf* $[a, \infty)$, $a > 0$

Bemerkung: Es gibt genau eine Funktion $f:\,(0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit (1) und

$$f(x) \leq x - 1 \quad \forall\, x \in (0,\infty),$$

nämlich $f = \ln$.

Bemerkungen: 1) Aus (1) folgt $\ln(1 \cdot 1) = \ln 1 + \ln 1 \Rightarrow \boxed{\ln 1 = 0}$.
Natürlich klar, da $e^\circ = 1$.
2) $\ln e = 1$

Außerdem liest man aus der Funktionalgleichung ab:

$$0 = \ln 1 = \ln\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = \ln x + \ln(1/x) \quad \Longrightarrow \quad \ln(1/x) = -\ln x.$$

Beweis des Satzes:

(1) $\exp(\ln(x \cdot y)) = x \cdot y = \exp(\ln x) \cdot \exp(\ln y) =$

$\exp(\ln x + \ln y) \quad \Longrightarrow \quad$ Beh., da exp bijektiv

(2) Aus Satz 8.3, (2) folgt: $1 + \ln x \leq \exp(\ln x) = x$.

Es gilt $1 - 1/x \in (-\infty, 1)$ für $x > 0$, d.h. nach 8.3 (3)

$$\exp\Big(1 - 1/x\Big) \leq \frac{1}{1 - (1 - 1/x)} = x \quad \Rightarrow 1 - \frac{1}{x} \leq \ln x.$$

(3) Seien $0 < x < y$. Wäre $\ln x \geq \ln y$, so hätte man wegen der Monotonie von exp den Wspr. $\exp(\ln x) = x \geq \exp(\ln y) = y$.

(4) Lipschitz-Eigenschaft auf $[a, \infty)$:

Seien $a \leq x < y \implies 0 \leq \ln y - \ln x = \ln y/x \underset{(2)}{\leq}$

$$\tfrac{y}{x} - 1 = \tfrac{1}{x}(y - x) \leq \tfrac{1}{a} \cdot (y - x).$$

□

Satz 8.6 : *Für alle reellen x ist*

“Reihenentwicklung” $\boxed{e^x = \lim\limits_{n \to \infty} (1 + \frac{x}{n})^n = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k}$

Beweis: die erste Gleichheit wurde bewiesen;
sei $f(x) := \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$, Konvergenzradius $= \infty$

1) Cauchy Produktformel Satz 7.9 $\implies f(x + y) = f(x) \cdot f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

2) $f(1) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$ (vgl. Nachbemerkung!) (man sieht nicht unmittelbar, dass f überall > 0 ist)

3) zeige: $\boxed{f(x) = f(1)^x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Da $f(1) = e$ ist, folgt dann die Behauptung.

$$n \in \mathbb{N}: \qquad f(n) = f(1 + \ldots + 1) = f(1)^n = e^n$$

$$e = f(1) = f\Big(n \cdot \tfrac{1}{n}\Big) = f\Big(\tfrac{1}{n} + \ldots + \tfrac{1}{n}\Big) = f\Big(\tfrac{1}{n}\Big)^n$$

$$\implies \quad f(\tfrac{1}{n}) = e^{1/n}$$

$$n, m \in \mathbb{N}: \quad f\Big(\tfrac{n}{m}\Big) = f\Big(\tfrac{1}{m} + \ldots + \tfrac{1}{m}\Big) = f\Big(\tfrac{1}{m}\Big)^n = e^{\frac{n}{m}}$$

$$1 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) \cdot f(-x) \implies f(-x) = 1/f(x)$$

$$n, m \in \mathbb{N}: \quad f(-\frac{n}{m}) = 1/f(n/m) = e^{-n/m}$$

Ergebnis: $e^x = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{Q}$

$x \mapsto e^x$ Lipschitz auf $[-M, M]$, ebenso f (vgl. Bspl. auf p. 104) für $M > 0$, d.h. man bekommt sofort die Gleichheit auf $\mathbb{R}$.
$(\mathbb{Q} \ni x_n \to x \implies f(x_n) \to f(x), e^{x_n} \to e^x)$ $\square$

Bemerkung: Es fehlt der Beweis von $e = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$. Dieser folgt aus

$$\left(1 + \tfrac{1}{m}\right)^m \underset{\substack{\uparrow \\ \text{bin. Formel}}}{\leq} \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} < \left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^n \quad \forall\, m \geq 2, \quad n \geq 2(m+1)!$$

Die zweite Ungleichung ist aufwendig und benötigt mehrfach die Bernoulli Ungleichung (vgl. Steffen I, p.254). $\square$

<u>Logarithmen zur Basis a</u>

$$a > 0 \implies a^x = \left(e^{\ell n a}\right)^x = e^{x \cdot \ln a}$$

An dieser Formel liest man ab (Satz 8.3): $a \neq 1 \implies x \mapsto a^x, x \in \mathbb{R}$, ist Bijektion $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$

Umkehrfunktion: $\boxed{\text{Logarithmus zur Basis } a. \quad \mathbb{R}^+ \ni y \mapsto \log_a y}$

$a = e \implies \log_e = \ln$

Umrechnungsformeln: $\boxed{\log_a x = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln x}$, $x > 0$

denn $a^{\frac{1}{\ln a} \cdot \ln x} = \left(e^{\ln a}\right)^{\frac{1}{\ln a} \ln x} = e^{\ln x} = x$

und $a^{\log_a x} = x$, also müssen die Exponenten gleich sein.

III. Exponentialfunktion $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$

Definition 8.4 *Für* $z \in \mathbb{C}$ *sei*

$$\exp z := \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

Bemerkungen: 1) $z \in \mathbb{R} \Longrightarrow \exp z = e^z$
2) Der Beweis der zweiten Gleichheit ist aufwendig.

Satz 8.7 *: Für die komplexe Exponentialfunktion gilt*

a) $\exp(z+w) = \exp(z) \cdot \exp(w)$

b) $0 \neq z_n \to 0 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\exp z_n - 1}{z_n} = 1$

Bemerkungen: 1) exp ist die <u>einzige</u> Funktion $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ mit a), b)

2) wir definieren für $z \in \mathbb{C}$: $\boxed{e^z := \exp z}$

$\Longrightarrow \quad e^{z+w} = e^z \cdot e^w \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$ (Potenzgesetz)

Diese Schreibweise rechtfertigt sich aus der Gleichheit von e^x und $\exp x$ im reellen Fall.

Beweis von Satz 8.7:

a) benutze den <u>Cauchy Produktsatz</u> für absolut konvergente Reihen

b)
$$\begin{aligned}
\left|\frac{\exp z_n - 1}{z_n} - 1\right| &= \left|\frac{1}{z_n}\sum_{k=1}^{\infty} z_n^k \frac{1}{k!} - 1\right| \\
&= \left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} z_n^{k-1} - 1\right| = \left|\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} z_n^{k-1}\right| \\
&\leq \sum_{k=2}^{\infty} |z_n|^{k-1} = |z_n| \cdot \sum_{k=0}^{\infty} |z_n|^k = \frac{1}{1-|z_n|} \cdot |z_n| \\
&\underset{n\to\infty,}{\longrightarrow} 0,
\end{aligned}$$

da $z_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$

$\square$

<u>bemerke:</u> für $a > 0$ ist $a = e^{\ln a}$, man wird also definieren

$$\boxed{a^z := e^{\ln a \cdot z},\ z \in \mathbb{C}}$$

IV. Die trigonometrischen Funktionen

Definition 8.5 *Die Funktion* $\underline{cis : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}}$ *ist erklärt durch* $\boxed{cis\, x := \exp(ix) = e^{ix}}$

Dann gilt: $\left|cis\, x\right|^2 = e^{ix} \cdot \overline{e^{ix}} = e^{ix} \cdot e^{-ix} = e^{\circ} = 1,$ (denn offensichtlich ist $\overline{\exp w} = \exp \overline{w}$, also $\overline{\exp ix} = \exp(-ix)$)

$\Longrightarrow$ die Punkte $cisx,\ x \in \mathbb{R}$, liegen auf der <u>Einheitskreislinie</u>

$S^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Satz 8.8 *:* *<u>Eigenschaften von cis</u>*

(1) $cis\,(x+y) = cis\, x \cdot cis\, y$ *(ergibt später die "Additionstheoreme" für* $\sin, \cos$*)* $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$

(2) $|cis\, x - cis\, y| \leq |x-y|$

(3) $cis\, \mathbb{R} = S^1$ *(Surjektivität)*

Bemerkung: wir werden gleich definieren $\sin x = \mathrm{Im}\ (cis\, x), \cos x = \mathrm{Re}\ (cis\, x)$, daran sollte man nachfolgend denken.

Beweis: (1) folgt aus $e^{i(x+y)} = e^{ix+iy} = e^{ix}\, e^{iy}$

zu (2), (3): setze $cis\, x =: c(x) + is(x)$. Es gilt

$$cis\, x = \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{1}{k!}\, i^k\, x^k \quad \overset{\text{Vergleich von Re u. Im}}{\Longrightarrow}$$

$$\left|\begin{array}{llll} c\,(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} & \underline{\text{gerade}}\ \text{Funktion} & c(-x) = c\,(x) \\ s\,(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} & \underline{\text{ungerade}}\ \text{Funktion} & s\,(-x) = -s(x) \end{array}\right.$$

beachte:

$$|x| \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{x^{2k}}{(2k)!} \geq \frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!}$$

$$x \in (o, 2] \quad \Longrightarrow \quad \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} > \frac{x^{2k+3}}{(2k+3)!}$$

daraus folgt:

$$|x| \le 1 \quad \Longrightarrow \quad 0 < c\,(x) \quad = \quad \overbrace{1 - \frac{x^2}{2!}}^{>0} \quad + \quad \overbrace{\frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}}^{\ge 0} \quad \pm \quad \ldots$$

$$x \in (0,2] \quad \Longrightarrow \quad 0 < s\,(x) \quad = \quad \underbrace{x - \frac{x^3}{3!}}_{>0} \quad + \quad \underbrace{\frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}}_{>0} \quad \pm \quad \ldots$$

Sei $\quad 0 \le x \le 1 \quad \Longrightarrow \quad 0 \le s(x) \quad = \quad x \quad - \quad \underbrace{\left(\frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!}\right)}_{>0} - \underbrace{\left(\frac{x^7}{7!} - \frac{x^9}{9!}\right)}_{>0} \quad - \quad \ldots$

$\Longrightarrow \quad 0 \le s(x) \le x \quad$ auf $[0,1] \quad \underset{\underline{s \text{ ungerade}}}{\Longrightarrow}$

(a) $\qquad \boxed{|s(x)| \ \le \ |x|, \ |x| \ \le \ 1}$

Für $\quad |x| \ge 1$ gilt (a) auch:

$$|s(x)| \ \le \ |cis\,x| \ \le \ 1 \ \le \ |x|$$

in diesem Fall. Nach diesen Vorbereitungen zu (2):

Seien $\quad x, y \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad e^{i(x-y)} \quad = \quad e^{ix}\, e^{-iy} \quad = \quad e^{ix}\, \overline{e^{iy}}$

also:

$$\begin{aligned}
& e^{i(x+y)} - e^{i(x-y)} \quad = \quad e^{ix}\left(e^{iy} - \overline{e^{iy}}\right) && = \\
& cis\,x \cdot \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{1}{k!}\,(iy)^k - \tfrac{1}{k!}\,(-iy)^k \right\} && = \\
& cis\,x \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\, \tfrac{y^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad 2i && = \\
& 2i\ cis\,x \cdot s\,(y)
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow \qquad cis\,(x+y) - cis\,(x-y) \quad = \quad 2i\,cis\,x \cdot s\,(y)$

ersetze $x \quad$ durch $\quad \frac{x+y}{2}, \quad y \quad$ durch $\quad \frac{y-x}{2} \quad \Longrightarrow$

(b) $\qquad \boxed{cis\,y - cis\,x \quad = \quad 2i\,cis\,\tfrac{x+y}{2} \cdot s\left(\tfrac{y-x}{2}\right)}$

(a), (b) $\quad \Longrightarrow \quad |cis\,x - cis\,y| \quad \le \quad 2 \cdot \left|s\left(\tfrac{y-x}{2}\right)\right| \quad \le \quad |x-y|.$

Gemäß $\quad |cis\,x - cis\,y| \quad = \quad \Bigg(\Big(c\,(x) - c\,(y)\Big)^2 \quad + \quad \Big(s\,(x) - s\,(y)\Big)^2\Bigg)^{1/2}$

folgt auch die Lipschitz Bedingung

$$\Big|s\,(x) - s\,(y)\Big| \quad \leq \quad |x-y| \; , \; \Big|c\,(x) - c\,(y)\Big| \quad \leq \quad |x-y|.$$

Damit ist (2) verifiziert.

(3) Es ist $\boxed{c\,(0) \quad = \quad 1 \text{ und } c\,(2) < 0.}$

$\Bigg($ beachte dazu: $\quad 2^{2k} \Big/ (2k)! \quad > \quad 2^{2k+2} \Big/ (2k+2)! \quad$ für $\quad k \geq 3$

und $\quad c\,(2) \quad = \quad \underbrace{1 - \frac{4}{2!} + \frac{16}{4!}}_{<0} \quad + \quad \underbrace{\sum_{k=3}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k}}{(2k)!}}_{<0} \Bigg)$

Realteil von (b) $\quad \Longrightarrow$

$$c\,(y) - c\,(x) \quad = \quad -2\; s\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \cdot s\Big(\frac{y-x}{2}\Big)$$

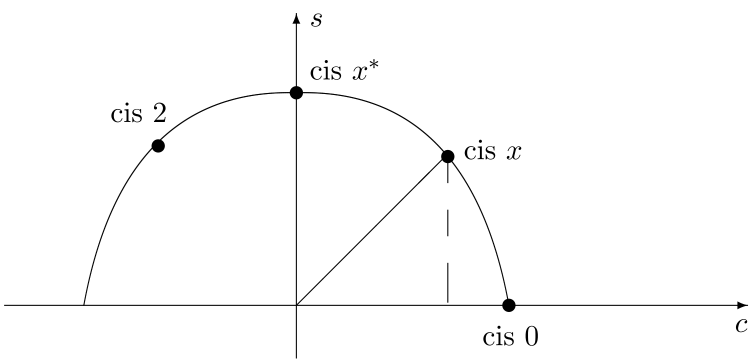
Seien $\quad 0 < x < y < 2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{x+y}{2}\,,\; \frac{y-x}{2} \in (0,2)$

außerdem: $\quad s > 0 \quad$ auf $\quad (0,2]$

Also: $\quad c\,(y) - c\,(x) < 0, \quad$ c streng fallend auf $[0,2]$

Zwischensatz für Lipschitz Funktionen $\quad \Longrightarrow$

$c\,:\,[0,2] \longrightarrow [c\,(2),\; c\,(0)] \quad$ bijektiv

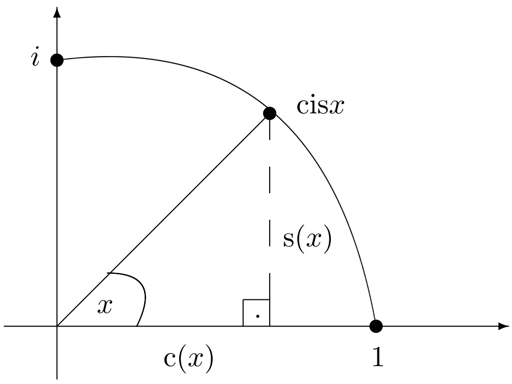


$\boxed{\text{Also gibt es genau eine Zahl } x^* \in (0,2) \text{ mit } c(x^*) = 0}$

(anschaulich: die Kurve $x \mapsto cis\, x$, $x \geq 0$, startet in $(1,0)$ und durchläuft dann S^1 entgegen dem Uhrzeigersinn. s^* ist der erste Zeitpunkt > 0, wo die Kurve die vertikale Achse schneidet (also gleich der Länge des Viertelkreises!)]

Definition 8.6 *:* $\boxed{\pi := 2x^*, \text{ also } x^* := \frac{\pi}{2}}$

Folgerung: $|cis\,\frac{\pi}{2}| = 1,\ s(\frac{\pi}{2}) > 0$



$\Longrightarrow$ $\boxed{s\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1}$

Für $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ durchläuft $cis\, x$ genau den <u>Viertelkreis</u> von $(1,0)$ nach $i = (0,1)$.

Außerdem: $cis\,\frac{\pi}{2} = i\, s\left(\frac{\pi}{2}\right) = i$.

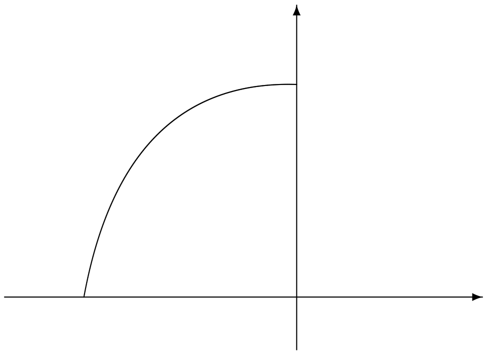
Für $x \in \mathbb{R}$ folgt:

(c) $cis\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = e^{i(x+\frac{\pi}{2})} = cis\, x \cdot cis\,\frac{\pi}{2} = i \cdot cis\, x$

Wir haben gesehen:

$cis : [0, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow \{z \in S^1 : \text{ Re } z \geq 0,\ \text{Im } z \geq 0\}$
bijektiv

Formel (c) $\Longrightarrow$ cis bildet $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ bijektiv ab auf



$\{z \in S^1 : \ \mathrm{Re}\, z \leq 0, \ \mathrm{Im}\, z \geq 0\}$

entsprechend betrachtet man $\left[\pi, \frac{\pi}{2}\,3\right]$ und $\left[\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right]$

$\Longrightarrow$ $\underline{cis : [0, 2\pi) \longrightarrow S^1 \ \text{bijektiv}}$ (beachte: $cis\, 0 = cis\, 2\pi$).

Aus (c) folge nach 4facher Anwendung: $cis\,(x + 2\pi) = i^4 \cdot cis\, x = cis\, x$

$\Longrightarrow$ $\underline{cis \ \text{(und damit } s, c) \text{ hat Periode } 2\pi}$ □

Definition 8.7 *:*

$$\boxed{\begin{array}{l} \sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \sin x := s\,(x) \\ \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \cos x := c\,(x) \end{array}}$$

Satz 8.9 *:* *Eigenschaften von* $\sin, \cos$

1) $\sin 0 = \sin \pi = 0, \ \sin \frac{\pi}{2} = 1, \ \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$
$\cos 0 = 1, \ \cos \pi = -1, \ \cos(-\frac{\pi}{2}) = \cos \frac{\pi}{2} = 0$

2) $\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$

(Additionstheoreme)

$\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \sin y \cdot \cos x$

3) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

4) $\Big|\cos x - \cos y\Big| \;\leq\; |x-y|, \qquad \Big|\sin x - \sin y\Big| \;\leq\; |x-y|$

5) $$\begin{array}{llll} \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin x, & \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) &=& \cos x \\ \cos\left(x+\pi\right) = -\cos x, & \sin\left(x+\pi\right) &=& -\sin x \\ \cos\left(x+2\pi\right) = \cos x, & \sin\left(x+2\pi\right) &=& \sin x \end{array}$$

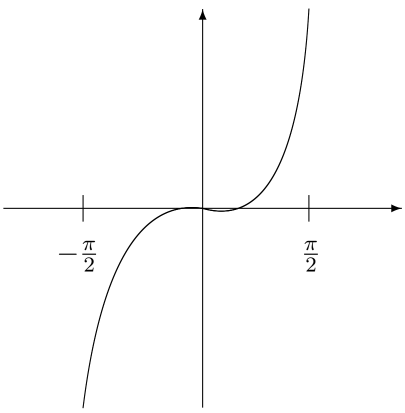
6) $\sin(\mathbb{R}) \;=\; \cos(\mathbb{R}) \;=\; \sin([0,2\pi]) \;=\; \cos[[0,2\pi]) \;=\; [-1,1]$

7) $\cos|_{[0,\pi]}$ *streng fallend, mit Bild* $[-1,1]$, $\quad \sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$ *streng wachsend mit Bild* $[-1,1]$

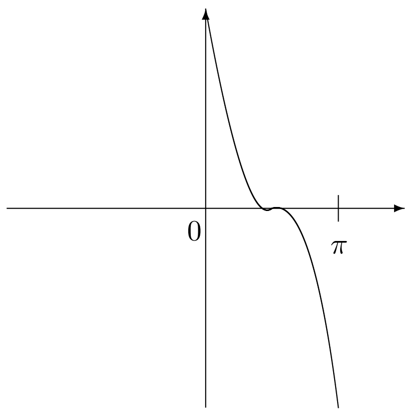
Beweis: folgt aus den Übungen zu Satz 8.9 □

Abgesehen von den Nullstellen von $\sin, \cos$ kann man definieren:

$$\left|\begin{array}{lll} \tan x := \sin x \Big/ \cos x, & x \neq \left(k+\frac{1}{2}\right)\pi, & k \in \mathbb{Z} \\ \cot x := \cos x \Big/ \sin x, & x \neq k\pi, & k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$



"Hauptzweig" von tan



"Hauptzweig" von cot

1) $\underline{\tan, \cot \quad \text{haben Periode} \quad \pi}$, da $\quad \frac{\sin}{\cos}\,(x+\pi) = -\frac{\sin}{\cos}\,(x)$

2) $\tan\Big|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}$ <u>streng wachsend</u>, $\cot\Big|_{(0,\pi)}$ <u>streng fallend</u>

(Bew.: "Additionstheoreme" + Fallunterscheidung)

3) $\Big|\tan x - \tan y\Big| \;\le\; \frac{1}{\cos^2 a}\,|x-y| \quad \forall\, x, a \in [-a,a], a < \pi/2$

$\Big($ denn: $\Big|\tan x - \tan y\Big| \;=\; \frac{1}{|\cos x \cdot \cos y|}\,\Big|\sin y \cdot \cos x - \sin x \cdot \cos y\Big|$

$\le\; \frac{1}{\cos^2 a}\,\Big|\sin(x-y)\Big| \;\le\; \frac{1}{\cos^2 a}\,|x-y|\Big)$

<u>Arcus - Funktion</u> sind die Umkehrfunktionen der Einschränkungen von $\sin, \cos, \tan, \cot$ auf geeignete Intervalle

$$\arcsin:\; [-1,1] \to \Big[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\Big], \quad \arccos:\; [-1,1] \to [0,\pi],$$

$$\arctan:\; \mathbb{R} \to \Big(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\Big), \quad \operatorname{arc\,cot}:\; \mathbb{R} \to (0,\pi)$$

V. Die Hyperbelfunktionen

(gewisse Analogie zu den trig. Funktionen; $(x,y) = (\cosh t, \sinh t)$ erfüllt $x^2 - y^2 = 1$ "Hyperbel")

$$\cosh x := \tfrac{1}{2}\Big(e^x + e^{-x}\Big), \; \sinh x := \tfrac{1}{2}\Big(e^x - e^{-x}\Big), \; x \in \mathbb{R}$$

$$\tanh x := \tfrac{\sinh x}{\cosh x} = \tfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\coth x := 1/\tanh x \quad , \quad x \neq 0.$$

(Cosinus-, Sinus-, Tangens-, Cotangenshyperbolicus)

Übungen: 1) $\cosh\Big|_{[0,\infty)}$ streng wachsend, sinh streng wachsend, tanh streng wachsend, coth streng fallend

2) $\cosh^2 - \sinh^2 \equiv 1$ 3) $\sinh(x+y) = \sinh x \cdot \cosh y + \sinh y \cdot \cosh x, \ldots\ldots$

Umkehrfunktionen:

$$\begin{aligned}
\operatorname{ar}\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R},,\ \operatorname{ar}\sinh x &= \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) \\
\operatorname{ar}\cosh : [1,\infty) \to [0,\infty),\ \operatorname{ar}\cosh x &= \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \\
\operatorname{ar}\tanh : (-1,1) \to \mathbb{R},\ \operatorname{ar}\tanh x &= \tfrac{1}{2}\log\tfrac{x+1}{1-x} \\
\operatorname{ar}\coth : \mathbb{R} - [-1,1] \to \mathbb{R} - \{0\},\ \operatorname{ar}\coth x &= \tfrac{1}{2}\log\tfrac{x+1}{x-1}
\end{aligned}$$

Übung: man prüfe diese Gesetzmäßigkeit nach!