Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Christian Tietz, M. Sc.

Differentialgeometrie (SS 2011)
Blatt 1

Aufgabe 1 (5+5=10 Punkte)

Berechnen Sie die Bogenlänge der folgenden Kurven auf einem Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

a) $\alpha(t) = (6t, 3t^2, t^3), \quad (t \in \mathbb{R})$.

b) $\beta(t) = (t, t\sin t, t\cos t), \quad (t \in \mathbb{R})$.

Aufgabe 2 (5+5=10 Punkte)

Parametrisieren Sie folgende Kurven nach Bogenlänge.

a) $\gamma(t) = e^{-t}(\cos t, \sin t, 1), \quad (t \in [0, \infty))$.

b) $\delta(t) = (e^t, e^{-t}, \sqrt{2}\, t), \quad (t \in \mathbb{R})$.

Aufgabe 3 (1,5+2+3+3,5=10 Punkte)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ und $b < 0$. Betrachten Sie für $t \in \mathbb{R}$ die durch $r(t) = ae^{bt}$ in Polarkoordinaten gegebene Kurve $\alpha = \alpha(t)$.

a) Skizzieren Sie α. Wie verändert sich r nach einer vollen Drehung?

b) Zeigen Sie: $\lim_{t\to\infty} \alpha(t) = (0, 0) = \lim_{t\to\infty} \dot{\alpha}(t)$.

c) Beweisen Sie, dass α auf jedem Intervall $[t_0, \infty)$ $(t_0 \in \mathbb{R})$ endliche Bogenlänge hat.

d) Sei $\vartheta(t) \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ der Schnittwinkel zwischen $\alpha(t)$ und der Ursprungsgerade durch $\alpha(t)$ (Skizze!). Zeigen Sie:

$$\tan\vartheta(t) = \frac{1}{b} \quad \text{für alle} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 4 (5+5=10 Punkte)

Seien $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ ($I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall) eine parametrisierte Kurve, $[a, b] \subset I$ und $A = \alpha(a)$, $B = \alpha(b)$ mit $A \neq B$. Zeigen Sie:

a) Für jeden Einheitsvektor $e \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$(B - A) \cdot e \leqslant L,$$

wobei L die Länge des Bogens von A nach B sei.

b) Die kürzeste Länge von A nach B ist die Strecke, welche diese beiden Punkte verbindet.

Abgabe: Dienstag, 26.04.2011, 10:00-11:00 Uhr in Zi. 432, Gebäude E2 4.