Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Christian Tietz, M.Sc.

Differentialgeometrie (SS 2011)
Blatt 10

Aufgabe 37 (8 Punkte)

Seien $X : \Omega \to \mathbb{R}^3$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen) eine parametrisierte Fläche und $w \in \Omega$ fixiert. Zeigen Sie: Durch die Abbildung $I\!I\!I_w : T_wX \times T_wX \to \mathbb{R}$,

$$I\!I\!I_w(U,V) := S_w(U) \cdot S_w(V),$$

wird eine symmetrische Bilinearform erklärt (*dritte Fundamentalform* von X), und es besteht die Beziehung

$$I\!I\!I_w - \big(\kappa_1(w) + \kappa_2(w)\big)\, I\!I_w + \kappa_1(w)\kappa_2(w)\, I_w \equiv 0.$$

Darin bezeichnen $\kappa_{1,2}(w)$ die Hauptkrümmungen von X bei w.

Aufgabe 38 (5+5=10 Punkte)

Bestimmen Sie zu folgenden Flächen X die Weingarten–Abbildung sowie die Hauptkrümmungen und Hauptkrümmungsrichtungen. Interpretieren Sie die Ergebnisse geometrisch und verdeutlichen Sie diese in einer Skizze.

a) X ist ein senkrechter Kreiszylinder.

b) X ist ein senkrechter (doppelter) Kreiskegel mit Spitze im Ursprung.

(*Hinweis:* Benutzen Sie die Tatsache, dass das Bild des Differentials der Gauß-Abbildung einer Fläche stets in der Tangentialebene der Fläche enthalten ist. Bestimmen Sie damit die Koeffizienten der Darstellungsmatrix der Weingarten–Abbildung.)

Aufgabe 39 (1+5+2+4=12 Punkte)

Eine Abbildung $X : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ ($I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall) der Gestalt

$$X(u,v) := \alpha(u) + vw(u),$$

wobei $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre Kurve und $w : I \to \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ glatt ist, heißt eine *Regelfläche*, falls X regulär ist. Die Kurve α wird dabei die *Leitkurve* und die Geraden $v \mapsto \alpha(u) + vw(u)$ ($u \in I$ fest) werden die *Regelgeraden* genannt.

a) Unter welchen Bedingungen ist X eine parametrisierte Fläche?

b) Zeigen Sie, dass die Tangentialebene von X in einem Punkt $(u, v) \in I \times \mathbb{R}$ (sofern diese existiert) genau dann unabhängig von v ist, wenn die Vektoren $\alpha'(u), w'(u)$ und $w(u)$ linear abhängig sind.

c) Zeigen Sie, dass das hyperbolische Paraboloid (A. 27) eine Regelfläche ist.

d) Untersuchen Sie, bei welchen der folgenden Regelflächen die Tangentialebene (wo sie existiert) unabhängig vom Parameter v ist und erläutern Sie anhand einer Skizze, was dies geometrisch bedeutet.

   i) X ist ein (verallgemeinerter) Kegel mit Spitze ion $P \in \mathbb{R}^3 \setminus \operatorname{spur} \alpha$, d.h. es ist $w(u) = P - \alpha(u)$

   ii) X ist ein (verallgemeinerter) Zylinder, d.h. w ist konstant.

   iii) X ist das hyperbolische Paraboloid aus Teil c).

Aufgabe 40 (3+2+5=10 Punkte)

a) Beweisen Sie, dass für eine parametrisierte Fläche stets $K \leq H^2$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass sich die Hauptkrümmungen $\kappa_{1,2}$ einer parametrisierten Fläche gemäß der Formel
$$\kappa_{1,2} = H \pm \sqrt{H^2 - K}$$
berechnen lassen.

c) Bestimmen Sie die Hauptkrümmungen eines Kreistorus.

Abgabe: Montag, 27.06.2011, 12:00-12:10 Uhr in HS003, Gebäude E1 3.