

**Differentialgeometrie (SS 2011)**  
**Blatt 11**

**Aufgabe 41 (1+4+7=12 Punkte)**

Gegeben sei eine Fläche  $X : I \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$  ( $I \subset \mathbb{R}$  ein offenes Intervall) der Form

$$X(u, v) = (h(u) \cos v, h(u) \sin v, k(u)),$$

wobei  $h : I \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$  und  $k : I \rightarrow \mathbb{R}$  glatte Funktionen mit  $h'^2 + k'^2 \equiv 1$  seien.

- Was bedeutet die Bedingung  $h'^2 + k'^2 \equiv 1$  geometrisch? Stellt diese Bedingung eine Einschränkung dar?
- Bestimmen Sie die Weingarten–Abbildung zu  $X$ . Berechnen Sie die Hauptkrümmungen und zeigen Sie, dass für die Gauß–Krümmung  $K$  von  $X$  gilt:

$$K = -\frac{h''}{h}.$$

- Charakterisieren Sie die Fläche in den Fällen  $K \equiv 0$  und  $K \equiv 1$ .

**Aufgabe 42 (5+5=10 Punkte)**

Betrachten Sie die durch die Vorschrift  $X : (0, 2\pi) \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$X(u, v) = \left( \left(1 + v \cos \frac{u}{2}\right) \cos u, \left(1 + v \cos \frac{u}{2}\right) \sin u, v \sin \frac{u}{2} \right),$$

definierte parametrisierte Fläche (*Möbiusband*).

- Bestimmen Sie die Gauß–Abbildung von  $X$  sowie deren Grenzlagen bei  $u \rightarrow 0$  und  $u \rightarrow 2\pi$ . Interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch.
- Zeigen Sie, dass für die Gauß–Krümmung  $K$  gilt:

$$K = -\left( \frac{2}{v^2 + 4\left(1 + v \cos \frac{u}{2}\right)^2} \right)^2.$$

**Aufgabe 43 (4+4+2=10 Punkte)**

Betrachten Sie die durch  $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$X(u, v) = (av \cos u, av \sin u, bu),$$

mit  $a, b > 0$ , erklärte *Wendelfläche (Helikoid)*.

- a) Zeigen Sie, dass es sich um eine Regelfläche (vgl. A. 39) handelt. Sind die Regelgeraden Asymptotenlinien?
- b) Bestimmen Sie die Krümmungslinien der Fläche.
- c) Zeigen Sie, dass  $X$  eine Minimalfläche ist.

(*Bemerkung.* Man kann zeigen, dass die Wendelfläche im wesentlichen die einzige nicht ebene — und damit die einzige nichttriviale — Regelfläche ist, die gleichzeitig eine Minimalfläche ist.)

**Aufgabe 44 (4+4=8 Punkte)**

Sei  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  ( $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  offen) eine reguläre parametrisierte Fläche. Zeigen Sie:

- a) Hat  $X$  überall auf  $\Omega$  negative Gauß-Krümmung, so gibt es zu jedem  $\omega \in \Omega$  genau zwei Asymptotenlinien durch  $X(\omega)$ . Unter welcher Bedingung sind die zugehörigen Asymptotenrichtungen zueinander orthogonal?
- b) Verschwindet die mittlere Krümmung von  $X$  in einem Punkt, der kein Flachpunkt ist, so gibt es in diesem Punkt genau zwei, zueinander orthogonale, Asymptotenrichtungen.

**Abgabe:** Montag, 04.07.2011, 12:00-12:10 Uhr in HS003, Gebäude E1 3.