Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Christian Tietz, M.Sc.

Differentialgeometrie (SS 2011)
Blatt 12

Aufgabe 45

a) Betrachten Sie für ein $r > 0$ die Raumkurve $\alpha : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$,

$$\alpha(t) = \frac{1}{5}\big(4r\cos t, 5r(1-\sin t), -3r\cos t\big).$$

i) Parametrisieren Sie α nach der Bogenlänge.
ii) Bestimmen Sie das Frenet–Dreibein zu α.
iii) Zeigen Sie, dass die Spur von α in einer Ebene im $\mathbb{R}^3$ liegt, und geben Sie eine Parametrisierung jener Ebene an. Wie sieht die Spur von α aus?

b) Bestimmen Sie die Scheitelpunkte der Kurve $\beta : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\beta(t) = \big(2\sin t, 3\cos t\big)$.

Aufgabe 46

Sei $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ ($I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall) eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve, deren Spur in einer Sphäre mit Radius $R > 0$ um den Punkt $\xi \in \mathbb{R}^3$ liegt. Zeigen Sie, dass für die Krümmung κ von γ gilt:

$$\kappa(s) \neq 0 \quad \text{und} \quad -\frac{1}{\kappa(s)} = \big(\gamma(s) - \xi\,\big) \cdot n(s) \quad \text{für alle } s \in I,$$

wobei $n(s)$ den Normalenvektor von γ bei s bezeichnet.
(*Hinweis*: Differenzieren Sie $|\gamma(s) - \xi|^2$ zweimal.)

Aufgabe 47

a) Berechnen Sie die Fundamentalmatrizen der ersten und zweiten Fundamentalform sowie die Hauptkrümmungen κ_1 und κ_2 in jedem Punkt $w \in \Omega$ folgender Flächen, die durch die Abbildungen $X : \Omega \to \mathbb{R}^3$ beschrieben werden ($\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen).

i) Für $\Omega := [0,\pi) \times [0,h]$ sei

$$X(u,v) := (\cos(u), \sin(u), v).$$

ii) Für $\Omega := (0,\infty) \times \mathbb{R}$ sei

$$X(u,v) := (\exp(-u)\cos(u), \exp(-u)\sin(u), v).$$

b) Jene Flächen, bei denen die Fundamentalmatrix G der ersten Fundamentalform der Bedingung $G = \lambda I$ ($\lambda : I \to \mathbb{R}$, $I =$ Einheitsmatrix) genügt, heißen konform parametrisiert. Konstruieren Sie eine solche Fläche.

Aufgabe 48

Es seien $X : \Omega \to \mathbb{R}^3$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen) eine parametrisierte Fläche und $c := X \circ \omega$, $\omega : I \to \Omega$ ($I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall) glatt, eine Kurve auf dieser Fläche. Für $w \in \Omega$ sei $P_w : \mathbb{R}^3 \to T_wX$ die *Orthogonalprojektion* in T_wX, i. e.

$$P_w(V) = V - \big(V \cdot N(w)\big)N(w).$$

Dann heißt $\frac{D\dot{c}}{dt}(t) := P_{\omega(t)}\big(\ddot{c}(t)\big)$ die *kovariante Ableitung* von $\dot{c}$. (In der Vorlesung wird gezeigt, dass jene Kurven c auf X mit $\frac{D\dot{c}}{dt} \equiv 0$ genau die Geodätischen von X sind.)

a) Zeigen Sie, dass für jede Kurve c in der Ebene $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ gilt:

$$\frac{D\dot{c}}{dt} \equiv \ddot{c}.$$

Was sind die Geodätischen der Ebene?

b) Betrachten Sie die Einheitssphäre, parametrisiert durch

$$X(u,v) = \big(\cos v \cos u, \cos v \sin u, \sin v\big).$$

Zeigen Sie, dass der *Äquator* (die Koordinatenkurve $u \mapsto X(u,0)$) der einzige geodätische *Breitenkreis* (die Koordinatenkurven $u \mapsto X(u,\cdot)$) von X ist.

c) Sind die *Meridiane* (die Koordinatenkurven $v \mapsto X(\cdot,v)$) von X Geodätische?

Abgabe: Keine. Dieses Aufgabenblatt dient Ihrer eigenen Vorbereitung auf die Klausur und wird nicht korrigiert! Lösungsvorschläge zu den Aufgaben finden Sie am 11.07.2011 auf der Internetseite zu dieser Vorlesung.