Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
M.Sc. Christian Tietz

Differentialgeometrie (SS 2011)
Blatt 2

Aufgabe 5 (4+3+3=10 Punkte)

a) Sei $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass es genau einen Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ gibt mit der Eigenschaft

$$\varphi(u) = u \cdot v \quad \text{für alle } u \in \mathbb{R}^3.$$

b) Beweisen Sie für $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ die Identität

$$(u \times v) \times w = (u \cdot w)v - (v \cdot w)u.$$

c) Seien $u \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ und $v \in \mathbb{R}^3$ vorgegebene Vektoren. Beweisen Sie, dass es genau dann einen Vektor $w \in \mathbb{R}^3$ mit $w \times u = v$ gibt, wenn $u \perp v$ ist. Ist w eindeutig bestimmt?

Aufgabe 6 (2+3+5=10 Punkte)

Betrachten Sie die Vorschrift

$$\alpha(t) := \left(\sin t, \cos t + \log \tan \frac{t}{2}\right) \quad (t \in (0, \pi)).$$

Zeigen Sie:

a) α erklärt bis auf die Stelle $t = \frac{\pi}{2}$ eine reguläre Kurve.

b) Der Parameter t ist der Winkel zwischen dem Vektor $\alpha'(t)$ und der y-Achse.

c) Die Länge des Segments der Tangente von α zwischen ihrem Berührpunkt und der y-Achse ist identisch 1. Fertigen Sie eine Skizze der Kurve an.

Aufgabe 7 (5+5=10 Punkte)

Es seien $\alpha, \beta : I \to \mathbb{R}^3$ differenzierbare Abbildungen auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

a) Die Abbildung $\alpha \times \beta : I \to \mathbb{R}^3$ ist differenzierbar mit

$$(\alpha \times \beta)' = \alpha' \times \beta + \alpha \times \beta' \quad \text{auf } I.$$

b) Gelten mit den Konstanten $a, b, c \in \mathbb{R}$ die Beziehungen

$$\alpha' = a\alpha + b\beta \quad \text{und } \beta' = c\alpha - a\beta \quad \text{auf } I,$$

so ist $\alpha \times \beta$ konstant auf I.

Aufgabe 8 (4×2.5=10 Punkte)

In der (x, y)-Ebene werde eine Kreisscheibe vom Radius 1 auf der der x-Achse abgerollt. Eine zweite Kreisscheibe vom Radius r habe denselben Mittelpunkt und sei fest mit der ersten verbunden.

a) Beschreiben Sie die Bahn, welche ein Punkt auf dem Rand der zweiten Kreisscheibe durchläuft, durch eine parametrisierte Kurve α. (Nehmen Sie an, dass der fixierte Punkt zur Zeit $t = 0$ auf der y-Achse liegt.)

b) Skizzieren Sie α für die Fälle $r < 1, r = 1$ und $r > 1$.

c) Ist α regulär? Bestimmen Sie gegebenenfalls die singulären Punkte von α.

d) Berechnen Sie im Fall $r = 1$ die Länge der Kurve für einen Umlauf der Kreisscheibe.

Abgabe: Montag, 02.05.2011, 12:00-12:10 Uhr in HS003, Gebäude E1 3.