Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
M.Sc. Christian Tietz

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Differentialgeometrie (SS 2011)
Blatt 3

Aufgabe 9 (3+2+2+2+2+1=12 Punkte)

Die sog. *Lemniskate von Bernoulli* ist der geometrische Ort S aller Punkte $P \in \mathbb{R}^2$, für die das Produkt der Abstände zu zwei vorgegebenen Punkten $A, B \in \mathbb{R}^2$, deren Abstand $2a$ beträgt ($a > 0$) konstant gleich a^2 ist. Die Punkte A und B heißen die *Brennpunkte* der Lemniskate. Nehmen Sie im Folgenden an, dass A und B auf der x-Achse und im gleichen Abstand zum Ursprung liegen.

a) Leiten Sie die Gleichung

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0,$$

welcher die Punkte $P := (x, y)$ der Menge S genügen, her.

b) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung der durch S beschriebenen Kurve.

c) Geben Sie die durch S beschriebene Kurve in Polarkoordinaten an.

d) Diskutieren Sie das Symmetrieverhalten der Kurve und bestimmen Sie die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.

e) Zeigen Sie, dass die Tangenten an die Kurve im Ursprung genau die beiden Winkelhalbierenden sind.

f) Skizzieren Sie die Kurve für $a \in \{1, 2, 3, 4\}$.

(*Hinweis zu (b).* Substituieren Sie $y = x \sin t$ mit $t \in [0, 2\pi]$.)

Aufgabe 10 (2+4+2+2=10 Punkte)

Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a^2 + b^2 = c^2$. Betrachten Sie die durch

$$\gamma(s) := \left(a \cos \frac{s}{c}, a \sin \frac{s}{c}, \frac{bs}{c} \right) \quad (s \in \mathbb{R}).$$

erklärte parametrisierte Kurve.

a) Ist γ nach der Bogenlänge parametrisiert?

b) Berechnen Sie Krümmung und Torsion von γ.

c) Zeigen Sie, dass alle Geraden in Richtung des Normalenvektors von $\gamma(s)$, die durch $\gamma(s)$ gehen, die z-Achse unter einem konstanten Winkel schneiden.

d) Skizzieren Sie die Kurve γ.

Aufgabe 11 (2+6+2=10 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass die orientierte Krümmung einer regulären ebenen Kurve bei Umorientierung das Vorzeichen wechselt.

b) Zeigen Sie, dass die orientierte Krümmung einer beliebigen, regulären ebenen Kurve $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ ($I \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall) mit $\alpha(t) := \big(x(t), y(t)\big)$ gegeben ist durch

$$\kappa_\alpha(t) = \frac{x'(t)\, y''(t) - x''(t)\, y'(t)}{\big(x'(t)^2 + y'(t)^2\big)^{\frac{3}{2}}}.$$

c) Leiten Sie eine entsprechende Formel für die Krümmung einer regulären ebenen Kurve in Polarkoordinatendarstellung her.

Aufgabe 12 (8 Punkte)

Zeigen Sie, dass das Frenetsche Dreibein $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ einer beliebigen (nicht notwendigerweise nach der Bogenlänge parametrisierten) regulären Kurve $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ ($I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall) mit nichtverschwindender Krümmung gegeben ist durch

$$\mathbf{t} = \frac{\dot\alpha}{|\dot\alpha|}, \quad \mathbf{n} = \frac{\dot\alpha \times \ddot\alpha}{|\dot\alpha \times \ddot\alpha||\dot\alpha|} \times \dot\alpha, \quad \mathbf{b} = \frac{\dot\alpha \times \ddot\alpha}{|\dot\alpha \times \ddot\alpha|}$$

(*Hinweis.* Betrachten Sie die zu α gehörige, nach der Bogenlänge umparametrisierte, Kurve und benutzen Sie die Formel aus A. 5.)

Abgabe: Montag, 09.05.2011, 12:00-12:10 Uhr in HS003, Gebäude E1 3.