**Universität des Saarlandes**
**Fachrichtung 6.1 – Mathematik**
Prof. Dr. Martin Fuchs
M.Sc. Christian Tietz

**Differentialgeometrie (SS 2011)**
**Blatt 4**

## Aufgabe 13 (5+5=10 Punkte)

Bestimmen Sie das Frenetsche Dreibein sowie Krümmung $\kappa$ und Torsion $\tau$ der Kurve $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$. Skizzieren Sie die Spur der Kurve (die Projektionen in die Koordinatenebenen) sowie die Graphen von $\kappa$ und $\tau$.

a) $\alpha(t) = \left(6t, 3t^2, t^3\right)$.

b) $\alpha(t) = \left(\sqrt{2}t, e^t, e^{-t}\right)$.

## Aufgabe 14 (2+5+2+1=10 Punkte)

Betrachten Sie die Abbildung $\gamma : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\gamma(t) := r\left(1 + \cos t, \sin t, 2\sin\frac{t}{2}\right),$$

wobei $r > 0$ ist. Zeigen Sie:

a) Die Kurve $\gamma$ liegt im Schnitt des Zylinders mit der Gleichung $(x-r)^2+y^2 = r^2$ mit der Sphäre um den Ursprung vom Radius $2r$.

b) Bestimmen Sie das Frenetsche Dreibein der Kurve $\gamma$.

c) Berechnen Sie Krümmung und Torsion von $\gamma$.

d) Skizzieren Sie die Kurve sowie deren Projektionen auf die Koordinatenebenen.

## Aufgabe 15 (9+3=12 Punkte)

a) Es sei $\kappa : I \to \mathbb{R}$ ($I \subset \mathbb{R}$ Intervall) eine differenzierbare Funktion. Zeigen Sie, dass durch $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$,

$$\alpha(s) := \left(\int \cos\theta(s)ds + a, \int \sin\theta(s)ds + b\right)$$

mit

$$\theta(s) := \int \kappa(s)ds + \varphi,$$

eine reguläre (nach Bogenlänge parametrisierte) Kurve mit $\kappa$ als orientierter Krümmung erklärt wird und diese Kurve bis auf Translation des Vektors $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ und eine Drehung des Winkels $\varphi$ eindeutig bestimmt ist.

b) Bestimmen Sie eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit $\alpha(0) = (0,0), \alpha'(0) = (1,0)$ und $\kappa(t) = t^2$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Ist $\alpha$ eindeutig bestimmt?

## Aufgabe 16 (8 Punkte)

Sei $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ ($I \subset \mathbb{R}$ Intervall) eine regulär parametrisierte Kurve mit nirgends verschwindender Krümmung $\kappa$. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

a) Es gibt einen Vektor $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, sodass $t \cdot v$ konstant ist.

b) Es gibt einen Vektor $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ mit $n \cdot v \equiv 0$.

c) Es gibt einen Vektor $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ derart, dass $b \cdot v$ konstant ist.

d) Das Verhältnis von Torsion $\tau$ und Krümmung $\kappa$ ist konstant.

Eine Kurve, welche einer dieser Bedingungen genügt, heißt *Böschungslinie*.

**Abgabe:** Montag, 16.05.2011, 12:00-12:10 Uhr in HS003, Gebäude E1 3.