

Differentialgeometrie (SS 2011)  
Blatt 5

**Aufgabe 17 (3+3,5+5,5=12 Punkte)**

Betrachten Sie die Abbildung  $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$c(t) := \begin{cases} (t, e^{-1/t^2}, 0) & ; t < 0 \\ (0, 0, 0) & ; t = 0 \\ (t, 0, e^{-1/t^2}) & ; t > 0. \end{cases}$$

- Zeigen Sie, dass  $c$  eine reguläre differenzierbare ( $c \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^3)$ ) Kurve ist.
- Beweisen Sie, dass die Krümmung  $\kappa$  von  $c$  nur für die Parameter  $t \in \{0, \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\}$  verschwindet. Welche geometrische Bedeutung hat die Aussage  $\kappa(0) = 0$ ?
- Zeigen Sie, dass der Grenzwert der Schmiegeebenen von  $c$  bei  $t \searrow 0$  die Ebene mit der Gleichung  $y = 0$  ist, während bei  $t \nearrow 0$  die Ebene mit der Gleichung  $z = 0$  approximiert wird. Was bedeutet dies für die Torsion?

**Aufgabe 18 (3,5+5,5+3=12 Punkte)**

Sei  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  ( $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall) eine regulär parametrisierte, ebene Kurve, deren orientierte Krümmung  $\kappa$  nirgends verschwindet. Die Kurve  $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,

$$\beta(s) := \alpha(s) + \frac{n(s)}{\kappa(s)}$$

heißt die *Evolute* von  $\alpha$ .

- Zeigen Sie, dass die Tangente an  $\beta$  stets normal zu  $\alpha$  ist.
- Betrachten Sie die Normalen an  $\alpha$  zu zwei Parameterwerten  $s \neq \sigma$  und beweisen Sie, dass die Schnittpunkte der Normalen bei  $s \rightarrow \sigma$  gegen einen Punkt auf  $\text{spur}\beta$  konvergieren. (*Hinweis:* Betrachten Sie den Differenzenquotienten  $\frac{\alpha(s) - \alpha(\sigma)}{s - \sigma}$ .)
- Bestimmen Sie die Evolute der *Kettenlinie*  $\alpha(t) := (t, \cosh(t))$  ( $t \in \mathbb{R}$ ).

### Definition

Sei  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine nach der Bogenlänge parametrisierten, geschlossene Kurve.  $\alpha$  heißt konvex, falls gilt:

$$(\alpha(s) - \alpha(s_0)) \cdot n_\alpha(s_0) \geq 0 \quad \text{für alle } s \in I, s_0 \in I$$

oder

$$(\alpha(s) - \alpha(s_0)) \cdot n_\alpha(s_0) \leq 0 \quad \text{für alle } s \in I, s_0 \in I.$$

Hierbei ist  $n_\alpha(s_0)$  der Normalenvektor zu  $\alpha$  in  $s_0$ .

### Aufgabe 19 (5+5=10 Punkte)

Sei  $\alpha : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2 (L > 0)$  eine nach der Bogenlänge parametrisierte einfach geschlossene und konvexe Kurve mit positiver Orientierung. Die Kurve  $\beta : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit

$$\beta(s) := \alpha(s) - rn_\alpha(s),$$

wobei  $r > 0$  eine Konstante ist, heißt *Parallelkurve* zu  $\alpha$ . Zeigen Sie:

- a)  $U(\beta) = U(\alpha) + 2\pi r$ .
- b)  $A(\beta) = A(\alpha) + Lr + \pi r^2$ .

Dabei bezeichnen  $U(\alpha)$  den Umfang und  $A(\alpha)$  den Inhalt des von der Kurve  $\alpha$  umschlossenen Gebietes.

### Aufgabe 20 (6 Punkte)

Die Normalen einer regulären parametrisierten Kurve mögen alle durch einen festen Punkt gehen. Zeigen Sie, dass dann die Spur der Kurve in einer Kreislinie enthalten ist.

**Abgabe:** Montag, 23.05.2011, 12:00-12:10 Uhr in HS003, Gebäude E1 3.