

Differentialgeometrie (SS 2011)
Blatt 6

Aufgabe 21 (10 Punkte)

Es sei $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$), $\alpha(t) := (x(t), y(t))$, ein stetig differenzierbarer Weg (d. h. $\alpha \in C^1([a, b]; \mathbb{R}^2)$) mit positiver Orientierung und ohne Doppelpunkte (d. h. α ist injektiv). Seien $A := \alpha(a)$ und $B := \alpha(b)$. Dann begrenzen die Spur von α und die Strecken \overline{OA} und \overline{OB} ein beschränktes Gebiet $S \subset \mathbb{R}^2$. Beweisen Sie, dass dessen Inhalt durch

$$A(S) = \frac{1}{2} \int_a^b x(t) y'(t) - y(t) x'(t) dt$$

gegeben ist.

(*Hinweis:* Parametrisieren Sie ∂S geeignet und wenden Sie den Divergenzatz von Gauß mit dem Vektorfeld $F(x, y) := \frac{1}{2}(x, y)$ ($(x, y) \in \mathbb{R}^2$) an. *Bemerkung:* Die Formel gilt auch, wenn α lediglich stückweise stetig differenzierbar ist.)

Aufgabe 22 (2+2,5+5,5=10 Punkte)

Betrachten Sie die in Polarkoordinaten durch

$$r(t) := \frac{a \cos(2t)}{\cos t}$$

($a > 0$) gegebene ebene Kurve $\alpha : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}^2$ (*Strophoide*).

- Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Kurve mit den Koordinatenachsen, und zeigen Sie, dass α die Gerade $x = -a$ als Asymptote hat.
- Die Kurve α hat im Ursprung einen *Doppelpunkt* (d. h. es gibt $t_1 \neq t_2$ mit $\alpha(t_1) = \alpha(t_2)$), so dass die Kurve eine *Schleife* bildet. Zeigen Sie, dass der Inhalt des von dieser Schleife umschlossenen Gebietes $(2 - \frac{\pi}{2})a^2$ beträgt (Skizze!).

- c) Die Kurve schließt zusammen mit ihrer Asymptote eine sich ins Unendliche erstreckende Fläche ein. Zeigen Sie, dass deren Inhalt $(2 + \frac{\pi}{2})a^2$ beträgt. (*Hinweis*: Betrachten Sie die um den Vektor $(a, 0)$ verschobene Kurve, und benutzen Sie die Formel aus A. 19.)

Aufgabe 23 (2+4+4=10 Punkte)

Sei $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ ($I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall) eine nach der Bogenlänge parametrisierte ebene Kurve und sei $\alpha_s : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ für $s > 0$ erklärt durch

$$\alpha_s(t) := \alpha(t) \pm sn(t),$$

wobei $n(t)$ die Normale von α bei t bezeichnet (α_s heißt (*innere* bzw. *äußere*) *Parallelkurve* zu α im Abstand s , vgl. Blatt 5, Aufgabe 19).

- Wann ist α_s regulär? Wann ist α_s nach der Bogenlänge parametrisiert?
- Drücken Sie im Fall, dass α_s regulär ist, die orientierte Krümmung κ_s von α_s durch die orientierte Krümmung κ von α aus.
- Sei $I = \mathbb{R}$ und sei α periodisch mit Periode $\ell \in (0, \infty)$. Zeigen Sie:

$$\left. \frac{d}{ds} L(\alpha_s|_{[0, \ell]}) \right|_{s=0} = \mp 2\pi \mathcal{I}(\alpha|_{[0, \ell]}),$$

wobei $\mathcal{I}(\alpha|_{[0, \ell]})$ den Rotationsindex von $\alpha|_{[0, \ell]}$ bezeichnet.

Aufgabe 24 (3+7=10 Punkte)

- Gibt es eine einfach geschlossene ebene Kurve mit einer Länge von sechs Metern, welche eine Fläche von drei Quadratmetern umschließt?
- Es seien \overline{AB} eine Strecke in der Ebene \mathbb{R}^2 und $l > |\overline{AB}|$. Beweisen Sie, dass eine Kurve der Länge l , welche die Punkte A und B verbindet und zusammen mit der Strecke \overline{AB} den größtmöglichen Flächeninhalt einschließt, ein Kreisbogen von A nach B ist.

Abgabe: Montag, 30.05.2011, 12:00-12:10 Uhr in HS003, Gebäude E1 3.