Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Christian Tietz, M.Sc.

Differentialgeometrie (SS 2011)
Blatt 7

Aufgabe 25 (10 Punkte)

Sei $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ ($I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall) eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve mit Krümmung κ und Torsion τ. Es seien $\kappa \neq 0, \kappa' \neq 0$ und $\tau \neq 0$. Die Funktionen κ und τ müssen auf I der Gleichung

$$\left(\frac{1}{\kappa}\right)^2 + \left(\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}\right)^2 = r^2$$

genügen, wobei $r > 0$ eine Konstante ist. Zeigen Sie: α liegt auf einer Sphäre mit Radius r. (*Hinweis*: Betrachten Sie die Kurve

$$\beta(s) := \alpha(s) + \frac{1}{\kappa(s)}\mathbf{n}(s) + \frac{\kappa'(s)}{\kappa^2(s)\tau(s)}\mathbf{b}(s) \quad (s \in I),$$

wobei $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ das Frenet'sche Dreibein von α bezeichnet.)

Aufgabe 26 (3+2+5=10 Punkte)

Eine einfach geschlossene, reguläre und konvexe Kurve $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ ($I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall) mit nirgends verschwindender Krümmung heißt eine *Eilinie*.

a) Beweisen Sie, dass eine Eilinie α zu jedem Einheitsvektor e genau einen Parameter $s \in I$ mit $t_\alpha(s) = e$ besitzt.

b) Begründen Sie, dass α nach dem orientierten Winkel $\vartheta(s) \in [0, 2\pi]$ zwischen dem Tangentenvektor $t_\alpha(s)$ und der x–Achse umparametrisiert werden kann. Diese Koordinaten heißen *tangentiale Polarkoordinaten*.

c) Es bezeichne β die gemäß (b) in tangentialen Polarkoordinaten parametrisierte Eilinie α. Die Kurve β heißt ein *Gleichdick*, falls für die *Stützfunktion* $h(\vartheta) := -\beta(\vartheta) \cdot n_\beta(\vartheta)$ mit einer Konstanten $d > 0$ gilt:

$$h(\vartheta) + h(\vartheta + \pi) = d \quad \text{für alle} \quad \vartheta \in [0, \pi].$$

Zeigen Sie, dass ein Gleichdick der Breite d den Umfang πd hat.

(*Hinweis zu (c):* Stellen Sie β bzgl. des Zweibeins $\left(n_\beta, n'_\beta\right)$ und mittels der Stützfunktion h dar.)

Aufgabe 27 (5×2=10 Punkte)

Betrachten Sie für $a, b, c > 0$ die folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^3$.

a) $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\right\}$ (*Ellipsoid*).

b) $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1\right\}$ (*einschaliges Hyperboloid*).

c) $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1\right\}$ (*zweischaliges Hyperboloid*).

d) $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z = 0\right\}$ (*elliptisches Paraboloid*).

e) $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - z = 0\right\}$ (*hyperbolisches Paraboloid*).

Skizzieren Sie diese Mengen, und stellen Sie möglichst große Teilmengen als parametrisierte Fläche dar.

Aufgabe 28 (3+3+4=10 Punkte)

Sei C die Spur einer regulären parametrisierten Kurve $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ ($I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall) mit $P \notin C$ für einen fixierten Punkt $P \in \mathbb{R}^3$. Sei K die Punktmenge, welche dadurch entsteht, dass sich eine durch den Punkt P verlaufende Gerade längs der Kurve C bewegt.

a) Finden Sie eine Parametrisierung X, deren Spur die Punktmenge K ist.

b) Bestimmen Sie die Gauß-Abbildung von X. Wann handelt es sich bei X um eine reguläre Fläche?

c) Untersuchen Sie die Situation, wenn C die *Neil'sche Parabel* ist und fertigen Sie eine Skizze an.

Abgabe: Montag, 06.06.2011, 12:00-12:10 Uhr in HS003, Gebäude E1 3.