Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Christian Tietz, M.Sc.

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Differentialgeometrie (SS 2011)
Blatt 8

Aufgabe 29 (5+5=10 Punkte)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $P \in \mathbb{R}^3$ und $X : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ eine Abbildung der Form:

a) $X(u,v) = P + v\alpha(u)$

b) $X(u,v) = \alpha(u) + vP$

mit einer Kurve $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$. Wann handelt es sich um eine parametrisierte Fläche? Skizzieren Sie die Situation jeweils in einem explizitem Beispiel.

Aufgabe 30 (4×2,5=10 Punkte)

Sei $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$X(u,v) := \frac{1}{1+u^2+v^2}(2u, 2v, u^2+v^2-1).$$

a) Zeigen Sie, dass X ein parametrisiertes Flächenstück ist.

b) Bestimmen Sie die Gauß-Abbildung N von X.

c) Stellen Sie das durch $V(u,v) := (u,v,1)$ definierte Vektorfeld $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ längs X in der Form
$$V = V^1 X_u + V^2 X_v + V^3 N$$
mit Funktionen $V^k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(k \in 1,2,3)$ dar.

d) Berechnen Sie den Inhalt von $X(B_r)$, wobei B_r die offene Kugel mit Radius r um den Ursprung ist.

Aufgabe 31 (3+2+5=10 Punkte)

Betrachten Sie die *stereographische Projektion* $\pi : S^2 \setminus N \to \mathbb{R}^2$, die einen Punkt $P = (x,y,z)$ der Sphäre S^2 (mit Mittelpunkt $(0,0,1)$) ohne den Nordpol $N = (0,0,2)$ auf den Schnittpunkt der (x,y)-Ebene mit den Geraden, die N und P verbindet, abbildet. Es sei $(u,v) = \pi(P)$.

a) Zeigen Sie, dass $\pi^{-1} : \mathbb{R}^2 \to S^2$ gegeben ist durch

$$x = \frac{4u}{u^2+v^2+4}, y = \frac{4v}{u^2+v^2+4}, z = \frac{2(u^2+v^2)}{u^2+v^2+4}.$$

Skizzieren Sie die Situation zunächst.

b) Welcher Teil der Sphäre kann mit der stereographischen Projektion als parametrisierte Fläche dargestellt werden?

c) Berechnen Sie $|\pi_u^{-1}|^2, |\pi_v^{-1}|^2, \pi_u^{-1} \cdot \pi_v^{-1}$.

Aufgabe 32 (5+5=10 Punkte)

Skizzieren Sie für ein $a > 0$ die folgenden Flächen sowie deren Gauß-Abbildungen. Dabei seien $u \in (0, 2\pi)$ und $v \in \mathbb{R}$.

a) $X(u,v) = (a \sinh(v)\cos(u), a \sinh(v)\sin(u), au)$ *(Helikoid)*.

b) $X(u,v) = (a \cosh(v)\cos(u), a \cosh(v)\sin(u), av)$ *(Katenoid)*.

Abgabe: Montag, 13.06.2011, 12:00-12:10 Uhr in HS003, Gebäude E1 3.