Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Christian Tietz, M.Sc.

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Differentialgeometrie (SS 2011)
Blatt 9

Aufgabe 33 (4+4+2=10 Punkte)

Seien Ω, $\widetilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$ offen, $X : \Omega \to \mathbb{R}^3$ eine parametrisierte Fläche, $\varphi := (\varphi^1, \varphi^2) : \widetilde{\Omega} \to \Omega$ eine Parametertransformation und $\widetilde{X} := X \circ \varphi$ die bzgl. φ umparametrisierte Fläche. Zeigen Sie:

a) Für die Gauß–Abbildung $\widetilde{N}$ der umparametrisierten Fläche $\widetilde{X}$ gilt:

$$\widetilde{N} = \frac{\det D\varphi}{\left|\det D\varphi\right|} N \circ \varphi \quad \text{auf } \widetilde{\Omega}.$$

b) Für die Fundamentalmatrix $\widetilde{G} := \left(\widetilde{g}_{ij}\right)$ der ersten Fundamentalform der umparametrisierten Fläche $\widetilde{X}$ gilt:

$$\widetilde{G} = (D\varphi)^\top G \circ \varphi \, D\varphi \quad \text{auf } \widetilde{\Omega},$$

wobei $G := (g_{ij})$ wie üblich die erste Fundamentalform der Fläche X bezeichnet.

c) Welche geometrische Bedeutung haben die Aussagen aus a) und b)?

Aufgabe 34 (5+5=10 Punkte)

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen, $X : \Omega \to \mathbb{R}^3$ eine parametrisierte Fläche und $\varphi : \widetilde{\Omega} \to \Omega$ eine orientierungserhaltende Parametertransformation. Zeigen Sie folgende Beziehungen zwischen der zweiten Fundamentalform $I\!I$ (bzw. $I\!I^{TX}$) von X und der zweiten Fundamentalform $\widetilde{I\!I}$ (bzw. $I\!I^{T\widetilde{X}}$) der umparametrisierten Fläche $\widetilde{X} := X \circ \varphi$.

a) Für alle $(\tilde{u}, \tilde{v}) \in \widetilde{\Omega}$ und alle $\widetilde{U}, \widetilde{V} \in \mathbb{R}^2$ ist

$$\widetilde{I\!I}_{(\tilde{u},\tilde{v})}\big(\widetilde{U}, \widetilde{V}\big) = I\!I_{\varphi(\tilde{u},\tilde{v})}\big(D\varphi_{(\tilde{u},\tilde{v})}\widetilde{U}, D\varphi_{(\tilde{u},\tilde{v})}\widetilde{V}\big).$$

b) Für alle $(\tilde{u}, \tilde{v}) \in \widetilde{\Omega}$ und alle $U, V \in T_{(\tilde{u},\tilde{v})}\widetilde{X}$ ist

$$I\!I^{T\widetilde{X}}_{(\tilde{u},\tilde{v})}(U, V) = I\!I^{TX}_{\varphi(\tilde{u},\tilde{v})}(U, V).$$

Aufgabe 35 (4+3+3=10 Punkte)

Sei $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ ($I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall) eine regulär parametrisierte Kurve mit nirgends verschwindender Krümmung. Für ein $r > 0$ sei $X : I \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$X(u, v) := \alpha(u) + r\big(\cos v \, n(u) + \sin v \, b(u)\big),$$

wobei n und b die Normale bzw. Binormale der *Leitkurve* α bezeichnen. Eine solche Fläche wird *Tube* genannt.

a) Bestimmen Sie die erste Fundamentalform von X. Unter welchen Voraussetzungen ist X eine parametrisierte Fläche?

b) Bestimmen Sie die zu X gehörige Gauß–Abbildung unter der Voraussetzung, dass X regulär ist.

c) Bestimmen Sie X, wenn die Leitkurve die Parabel mit der Gleichung $y = z^2$ ist. Skizzieren Sie diese Fläche.

Aufgabe 36 (4+3+3=10 Punkte)

Betrachten Sie die Abbildung $X : (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$,

$$X(u, v) := \big((a + b\cos v)\cos u, (a + b\cos v)\sin u, c\sin v\big),$$

wobei a, b und c positive reelle Zahlen sind.

a) Untersuchen Sie, wann durch X eine parametrisierte Fläche erklärt wird.

b) Bestimmen Sie (im Falle der Regularität) die erste und zweite Fundamentalform von X.

c) Bestimmen Sie (auch im singulären Fall) die Projektion von X in die (x, z)–Ebene und skizzieren Sie die durch X erzeugte Fläche.

Abgabe: Montag, 20.06.2011, 12:00-12:10 Uhr in HS003, Gebäude E1 3.