

Differentialgeometrie (SS 2011)
Lösungsvorschlag zu Blatt 12

Aufgabe 45

a) i) Offensichtlich ist α beliebig oft differenzierbar mit

$$\alpha'(t) = \left(-\frac{4r}{5} \sin t, -r \cos t, \frac{3r}{5} \sin t \right),$$

also

$$|\alpha'(t)|^2 = \frac{16r^2}{25} \sin^2 t + r^2 \cos^2 t + \frac{9r^2}{25} \sin^2 t = r^2.$$

Die Bogenlänge von α ist also gegeben durch $s : (0, 2\pi) \rightarrow (0, 2\pi r)$,

$$s(t) = \int_0^t |\alpha'(\tau)| d\tau = rt.$$

Die Umkehrfunktion von s ist gegeben durch $t : (0, 2\pi r) \rightarrow (0, 2\pi)$, $t(s) = \frac{s}{r}$. Demzufolge ist $\beta : (0, 2\pi r) \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\beta(s) = \left(\frac{4r}{5} \cos \frac{s}{r}, r \left(1 - \sin \frac{s}{r} \right), -\frac{3r}{5} \cos \frac{s}{r} \right),$$

eine Umparametrisierung der Kurve α nach Bogenlänge.

ii) Wir betrachten die umparametrisierte Kurve $\beta = \beta(s)$ aus i). Dann ist

$$\mathbf{t}(s) = \beta'(s) = \left(-\frac{4}{5} \sin \frac{s}{r}, -\cos \frac{s}{r}, \frac{3}{5} \sin \frac{s}{r} \right)$$

und

$$\beta''(s) = \left(-\frac{4}{5r} \cos \frac{s}{r}, \frac{1}{r} \sin \frac{s}{r}, \frac{3}{5r} \cos \frac{s}{r} \right),$$

was $|\beta''(s)| = \frac{1}{r^2}$ ergibt, so dass also

$$\mathbf{n}(s) = \frac{\beta''(s)}{|\beta''(s)|} = \left(-\frac{4}{5} \cos \frac{s}{r}, \sin \frac{s}{r}, \frac{3}{5} \cos \frac{s}{r} \right)$$

wird. Für \mathbf{b} erhält man schließlich

$$\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s) = \dots = \left(-\frac{3}{5}, 0, -\frac{4}{5} \right) =: \mathbf{b}_0.$$

iii) Gem. ii) ist die Krümmung κ von β gegeben durch $\kappa(s) = |\beta''(s)| = \frac{1}{r} > 0$ und es ist $\mathbf{b}' \equiv 0$. Nach den Frenet-Gleichungen ist aber $\mathbf{b}' = \tau \mathbf{n}$, was $\tau \equiv 0$ zur Folge hat (wegen $\mathbf{n} \neq 0$). Demzufolge liegt die Spur der Kurve β (und damit auch die von α !) in einer Ebene im \mathbb{R}^3 . Ferner ist, da β (und damit auch α) konstante Krümmung ($\neq 0$) hat, die Spur von β (und damit auch von α) Teil eines Kreises (es fehlt lediglich der Punkt zum Parameter $t = 0$ bzw. $t = 2\pi$).

Wegen $\mathbf{b} \equiv b_0$ ist

$$\frac{d}{ds}(\beta'(s) \cdot \mathbf{b}(s)) = \mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{b}(s) + \beta(s) \cdot \mathbf{b}'(s) \equiv 0,$$

d. h. spur β (und damit auch spur α) liegt in der Ebene senkrecht zu b_0 . Diese wird z. B. von $\mathbf{t}(\pi r) = (0, 1, 0) = e_2$ und $\mathbf{n}(\pi r) = (\frac{4}{5}, 0, -\frac{3}{5})$ aufgespannt, so dass

$$X(u, v) = \beta(\pi r) + u\mathbf{t}(\pi r) + v\mathbf{n}(\pi r) = \left(-\frac{4r}{5}, r, \frac{3r}{5}\right) + ue_2 + v\left(\frac{4}{5}, 0, -\frac{3}{5}\right)$$

$((u, v) \in \mathbb{R}^2)$ eine Parametrisierung dieser Ebene ist.

b) Schreibe $\beta(t) = (x(t), y(t))$. Dann ist (vgl. A. 11)

$$\kappa(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Hier: $x'(t) = 2 \cos t$, $x''(t) = -2 \sin t$, $y'(t) = -3 \sin t$ und $y''(t) = -3 \cos t$.
Damit wird

$$x'(t)^2 + y'(t)^2 = 4 \cos^2 t + 9 \sin^2 t \quad (\neq 0)$$

$$x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t) = -6(\cos^2 t + \sin^2 t) = -6,$$

also

$$\kappa(t) = -6(4 \cos^2 t + 9 \sin^2 t)^{-\frac{3}{2}},$$

folglich verschwindet

$$\kappa'(t) = 90(4 \cos^2 t + 9 \sin^2 t)^{-\frac{5}{2}} \sin t \cos t$$

genau für die Parameter $t \in \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\}$, für welche κ extremal ist (Vorzeichenwechsel von κ' beachten!). Damit besitzt β genau vier Scheitelpunkte, nämlich

$$\beta(0) = \beta(\pi) = (0, 3), \quad \beta\left(\frac{\pi}{2}\right) = (2, 0), \quad \beta(\pi) = (0, -3), \quad \beta\left(\frac{3\pi}{2}\right) = (-2, 0).$$

Aufgabe 46

Nach Voraussetzung gilt $|\gamma(s) - \xi|^2 = R^2$. Differenzieren dieser Gleichung ergibt

$$0 = \frac{d}{ds} (|\gamma(s) - \xi|^2) = 2(\gamma(s) - \xi) \cdot \gamma'(s)$$

für alle $s \in I$. Da γ nach Bogenlänge parametrisiert ist, bedeutet dies $(\gamma - \xi) \cdot \mathbf{t} \equiv 0$. Da die Krümmung von γ durch γ'' bestimmt ist, leiten wir die Gleichung nochmals ab:

$$0 = \frac{d^2}{ds^2} (|\gamma(s) - \xi|^2) = 2(|\gamma'(s)|^2 + (\gamma(s) - \xi) \cdot \gamma''(s))$$

für alle $s \in I$. Wegen $|\gamma'| \equiv 1$ ist dies wiederum gleichbedeutend mit

$$(\gamma - \xi) \cdot \mathbf{t}' \equiv -1,$$

wegen der Frenet-Gleichung $\mathbf{t}' = \kappa \mathbf{n}$ also $(\gamma - \xi) \cdot \kappa \mathbf{n} \equiv -1$. Dies impliziert aber $\kappa \neq 0$ (sonst: $0 = -1$), und damit die behauptete Formel.

Aufgabe 47

a) i) Wir berechnen $X_u(u, v) = \begin{pmatrix} -\sin(u) \\ \cos(u) \\ 0 \end{pmatrix}$ und $X_v(u, v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Somit

erhalten wir direkt:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Des Weiteren gilt: $X_u(u, v) \times X_v(u, v) = \begin{pmatrix} \cos(u) \\ \sin(u) \\ 0 \end{pmatrix}$ und wegen $|X_u(u, v) \times X_v(u, v)| = 1$ ergibt sich $N(u, v) = X_u(u, v) \times X_v(u, v)$. Darüber hinaus

erhalten wir $X_{uu} = \begin{pmatrix} -\cos(u) \\ -\sin(u) \\ 0 \end{pmatrix}$ und $X_{uv} = X_{vu} = X_{vv} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Für die

Fundamentalmatrix der zweiten Fundamentalform folgt demnach:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Um die Hauptkrümmungen auszurechnen nutzen wir aus, dass $X_u(u, v)$ und $X_v(u, v)$ eine Orthonormalbasis von $T_{(u,v)}X$ bilden. Es ergibt sich demnach:

$$S_{(u,v)}(X_u(u, v)) = -N_u(u, v) = \begin{pmatrix} \sin(u) \\ -\cos(u) \\ 0 \end{pmatrix} = (-1)X_u(u, v),$$

wobei hierbei $\kappa_1 = -1$ und $X_u(u, v)$ in jedem Punkt $\omega = (u, v) \in \Omega$ Hauptkrümmung bzw. Hauptkrümmungsrichtung sind. Analog erhalten wir $S_{(u,v)}(X_v(u, v)) = -N_v(u, v) = 0$, also $\kappa_2 = 0$ als zweite Hauptkrümmung und $X_v(u, v)$ als zweite Hauptkrümmungsrichtung in jedem Punkt $\omega \in \Omega$.

ii) Wir berechnen $X_u(u, v) = \begin{pmatrix} -\exp(-u)(\cos(u) + \sin(u)) \\ \exp(-u)(\cos(u) - \sin(u)) \\ 0 \end{pmatrix}$ und $X_v(u, v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Somit erhalten wir direkt:

$$G = \begin{pmatrix} 2 \exp(-2u) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Des Weiteren gilt:

$$X_u(u, v) \times X_v(u, v) = \begin{pmatrix} \exp(-u)(\cos(u) - \sin(u)) \\ \exp(-u)(\cos(u) + \sin(u)) \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$|X_u(u, v) \times X_v(u, v)| = \exp(-u)\sqrt{2}.$$

Darüber hinaus berechnen wir:

$$X_{uv} = X_{vu} = X_{vv} = 0 \text{ und } X_{uu} = \begin{pmatrix} 2 \exp(-u) \sin(u) \\ -2 \exp(-u) \cos(u) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Fundamentalmatrix der zweiten Fundamentalform hat demnach die Darstellung:

$$B = \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{2}}{\exp(u)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Für die beiden Hauptkrümmungen erhalten wir nach Berechnen der Darstellungsmatrix der Weingartenabbildung:

$$\kappa_1 = \frac{-1}{\sqrt{2} \exp(-u)} \text{ und } \kappa_2 = 0.$$

Aufgabe 48

a) Sei $c = (c_1, c_2, 0)$ eine Kurve in der Ebene $X(u, v) = (u, v, 0)$. Die Gauß-Abbildung N von X ist gegeben durch $N(u, v) = (0, 0, 1)$. Daher ist

$$\frac{D\dot{c}}{dt} = P_{(c_1, c_2)}(\ddot{c}_1, \ddot{c}_2, 0) = (\ddot{c}_1, \ddot{c}_2, 0) = \ddot{c}.$$

Die Geodätischen der Ebene sind also genau die Kurven c mit $\ddot{c} \equiv 0$, d. h.

$$c(t) = (at + c, bt + d, 0) = t(a, b) + (c, d) \quad (t \in \mathbb{R})$$

mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, also genau die Geraden.

b) Allgemein ist ein Breitenkreis von X zu fixiertem $v \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ gegeben durch

$$c(t) = (\cos v \cos t, \cos v \sin t, \sin v) \quad (t \in (0, 2\pi)),$$

d. h. $c(t) = (X \circ \omega)(t)$ mit $\omega(t) = (t, v)$. Die Gauß-Abbildung der Sphäre ist $N(u, v) = -X(u, v)$ (vgl. Vorlesung) und man erhält

$$\begin{aligned} \frac{D\dot{c}}{dt}(t) &= P_{\omega(t)}(\ddot{c}(t)) = \ddot{c}(t) - (\ddot{c}(t) \cdot N(\omega(t)))N(\omega(t)) \\ &= (-\sin^2 v \cos v \cos t, -\sin^2 v \cos v \sin t, \cos^2 v \sin v). \end{aligned}$$

Damit verschwindet $\frac{D\dot{c}}{dt}$ genau für $v = 0$.

c) Ein Meridian von X zu einem festen $u \in (0, 2\pi)$ ist gegeben durch

$$c(t) = (\cos t \cos u, \cos t \sin u, \sin t) \quad (t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})),$$

d. h. $c(t) = (X \circ \omega)(t)$ mit $\omega(t) = (u, t)$. Analog zu (b) erhält man

$$\begin{aligned} \frac{D\dot{c}}{dt}(t) &= P_{\omega(t)}(\ddot{c}(t)) = \ddot{c}(t) - (\ddot{c}(t) \cdot N(\omega(t)))N(\omega(t)) \\ &= (1 - |\ddot{c}(t)|^2)\ddot{c}(t) \equiv 0, \end{aligned}$$

da $|\ddot{c}| \equiv 1$.

Bemerkung.

Betrachtet man statt der Einheitssphäre eine Sphäre mit beliebigem Radius, so sind nach der Bogenlänge parametrisierte Breitenkreise und Meridiane Geodätische (gilt allgemein für Rotationsflächen). Allgemein gilt: Ist eine Kurve eine Geodätische auf einer Fläche, so ist diese Kurve notwendig nach der Bogenlänge parametrisiert! (Die Umkehrung davon ist i. a. natürlich falsch.)

Kriterien für Geodätische

Im folgenden seien $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen) eine parametrisierte Fläche, $\omega : I \rightarrow \Omega$ ($I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall) eine Parameterkurve (glatt) und $\gamma := X \circ \omega : I \rightarrow X(\Omega)$ eine Kurve auf der Fläche.

- a) γ ist Geodätische von $X \iff \gamma'' \parallel N$, d. h. es ist $\gamma''(t) \parallel N(\omega(t))$ für alle $t \in I$.

Das kann man benutzen, um festzustellen, ob eine gegebene Kurve eine Geodätische einer gegebenen Fläche ist.

Beispielsweise gilt für eine Sphäre X mit Radius $R > 0$: Die Kurve $\gamma : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\gamma(t) := (R \cos t \cos v, R \cos t \sin v, R \sin t) \quad (v \in (0, 2\pi) \text{ fest}),$$

ist eine Geodätische. Denn es ist $\gamma = X \circ \omega$ mit $\omega(t) := (t, v)$ und $N(\omega(t)) = -\frac{1}{R}\gamma(t)$ (in der Vorlesung wurde $N = -\frac{1}{R}X$ gezeigt), und man rechnet nach:

$$N(\omega(t)) = \frac{1}{R}\gamma''(t) \quad \text{für alle } t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}).$$

- b) γ ist Geodätische von $X \iff \frac{D\gamma'}{dt} \equiv 0$ (kovariante Ableitung von γ' verschwindet identisch).
- c) γ ist Geodätische von $X \implies |\gamma'| \equiv \text{const} \neq 0$ (γ hat konstante Geschwindigkeit bzw. ist proportional zur Bogenlänge parametrisiert).

Die Umkehrung davon ist natürlich i. a. falsch! Diese notwendige Bedingung benutzt man häufig um zu überprüfen, ob eine gegebene Kurve eine Geodätische ist.

- d) Um alle Geodätischen einer Fläche zu bestimmen, betrachtet man die Differentialgleichung für Geodätische. Diese ist äquivalent zu der Bedingung unter b).
- e) Speziell für Rotationsflächen, die durch Rotation einer regulären Kurve $(h, k) : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ (mit $h \neq 0$) um die z -Achse entstehen, gilt (s. o.):
- i) Nach der Bogenlänge parametrisierte Meridiane sind Geodätische.
 - ii) Nach der Bogenlänge parametrisierte Breitenkreise sind Geodätische genau dann, wenn ihr Radius $r \in I$ ein kritischer Punkt von h ist, also $h'(r) = 0$.