Hauptachsentransformation: Eigenwerte und Eigenvektoren

.........die bisherigen Betrachtungen beziehen sich im Wesentlichen auf die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$.

Nun soll aufgezeigt werden, wie man sich von dieser Einschränkung lösen kann und wie bei konkreten Problemen zu geeigneteren Basen übergegeangen werden kann.

Zur Anschaulichkeit der Rechnungen wird hier o.E. der $\mathbb{R}^2$ betrachtet - die Rechnungen im $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, verlaufen formal identisch.

Neue Koordinaten.

Es sei $(\underline{\mathbf{e}}^{(1)}, \underline{\mathbf{e}}^{(2)})$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^2$ und $(\underline{\mathbf{f}}^{(1)}, \underline{\mathbf{f}}^{(2)})$,

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{f}}^{(1)} &= a\underline{\mathbf{e}}^{(1)} + b\underline{\mathbf{e}}^{(2)} \ , \\ \underline{\mathbf{f}}^{(2)} &= c\underline{\mathbf{e}}^{(1)} + d\underline{\mathbf{e}}^{(2)} \ . \end{aligned}$$

sei eine weitere Basis des $\mathbb{R}^2$. Hier sind a, b, c, $d \in \mathbb{R}$ und es gelte (man beachte die Anordnung der Koeffizienten!)

$$S = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in M(2,2) \quad \text{mit} \quad \det S \neq 0 \ .$$

Merke. Die neuen Basisvektoren sind die Spaltenvektoren von S.

Wegen $\det S \neq 0$ ist dabei $(\underline{\mathbf{f}}^{(1)}, \underline{\mathbf{f}}^{(2)})$ tatsächlich eine Basis des $\mathbb{R}^2$ (warum?).

Ein beliebiger Vektor $\underline{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^2$ kann sowohl bzgl. der kanonischen Basis als auch bzgl. der neuen Basis $(\underline{\mathbf{f}}^{(1)}, \underline{\mathbf{f}}^{(2)})$ dargestellt werden, d.h. es gibt eindeutig bestimmte Koeffizienten u_1, u_2 mit

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} &= v_1\underline{\mathbf{e}}^{(1)} + v_2\underline{\mathbf{e}}^{(2)} \\ &= u_1\underline{\mathbf{f}}^{(1)} + u_2\underline{\mathbf{f}}^{(2)} \ . \end{aligned}$$

Einsetzen ergibt

$$\underline{\mathbf{v}} = (au_1 + cu_2)\underline{\mathbf{e}}^{(1)} + (bu_1 + du_2)\underline{\mathbf{e}}^{(2)} \ .$$

Mit der Transformationsmatrix S kann diese Beziehung wie folgt interpretiert werden:

Die Koordinaten bzgl. der Standardbasis und die Koordinaten bzgl. der neuen Basis $(\underline{\mathbf{f}}^{(1)}, \underline{\mathbf{f}}^{(2)})$ erfüllen die Gleichung

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} .$$

Mit anderen Worten: Die neuen Koordinaten ergeben sich aus

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} .$$

Zwei Beispiele.

Beispiel 1. Im $\mathbb{R}^2$ betrachte man die Ellipse

$$E = \left\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 : \frac{x_1^2}{4} + x_2^2 = 1 \right\} .$$

mit den Längen 2 und 1 der Halbachsen (vgl. Abbildung 1).
Ist

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

so kann dies äquivalent als

$$E = \left\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 : \underline{\mathbf{x}}^T A \underline{\mathbf{x}} = 1 \right\}$$

geschrieben werden.

Beobachtung. Die Achsen der Ellipse zeigen in Richtung der kanonischen Basisvektoren und die Matrix A angewandt auf einen Basisvektoren ergibt jeweils ein Vielfaches des Basisvektors:

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \\ A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

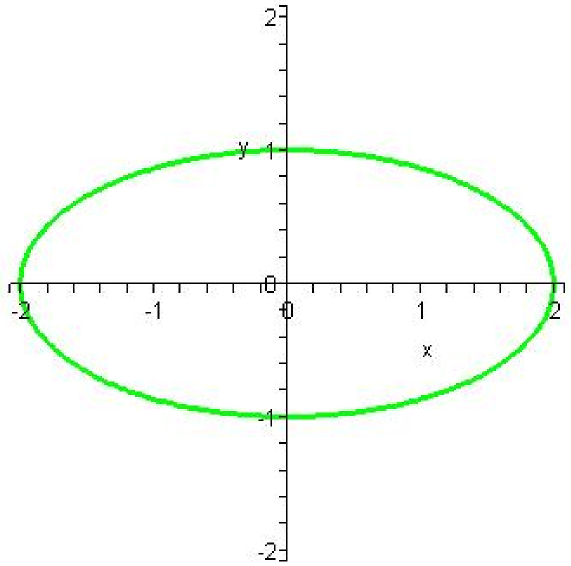

Abbildung 1: Die Ellipse E.

Man sagt dazu:

Die Zahlen $\lambda_1 = 1/4$ und $\lambda_2 = 1$ heißen Eigenwerte der Matrix A und $\underline{\mathbf{e}}^{(1)}$, $\underline{\mathbf{e}}^{(2)}$ sind dazugehörige Eigenvektoren.

Bemerkung. Alle Vielfachen eines Eigenvektors sind ebenfalls Eigenvektoren zum gleichen Eigenwert.

Beispiel 2. Nun wird die Menge

$$\tilde{E} = \left\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 : \ \frac{1}{8}\left[5(x_1^2 + x_2^2) - 6x_1x_2\right] = 1 \right\}$$

betrachtet, deren geometrische Struktur in dieser Form nicht ersichtlich ist.
Mit der Matrix

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \frac{5}{8} & -\frac{3}{8} \\ -\frac{3}{8} & \frac{5}{8} \end{pmatrix}$$

lautet die äquivalente Schreibweise in diesem Beispiel

$$\tilde{E} = \left\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 : \ \underline{\mathbf{x}}^T \tilde{A} \underline{\mathbf{x}} = 1 \right\} .$$

Wenn Eigenwerte und Eigenvektoren eine geometrische Bedeutung haben, dann sind diese zunächst zu berechnen:
Per definitionem ist $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert der Matrix $\tilde{A}$, falls ein Vektor $\underline{\mathbf{v}} \neq \underline{\mathbf{0}} \in \mathbb{R}^2$ existiert mit

$$\tilde{A}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \lambda I_2 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} ,$$

wobei I_2 wie üblich die Einheitsmatrix

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

bezeichnet.
Diese Gleichung wird geschrieben als

$$(\tilde{A} - \lambda I_2)\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{0}} .$$

Dieses homogene lineare Gleichungssystem hat genau dann eine Lösung, wenn

$$\det(\tilde{A} - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} \frac{5}{8} - \lambda & -\frac{3}{8} \\ -\frac{3}{8} & \frac{5}{8} - \lambda \end{vmatrix} = 0 ,$$

d.h. falls

$$\lambda^2 - \frac{10}{8}\lambda + \frac{1}{4} = 0 .$$

Man findet die beiden Eigenwerte

$$\lambda_1 = \frac{1}{4} \quad \text{und} \quad \lambda_2 = 1 .$$

Die Gleichungssysteme

$$\tilde{A}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \tilde{A}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

liefern dazu die Eigenvektoren (hier auf Länge 1 normiert - jedes Vielfache hätte ebenso genommen werden können)

$$\underline{\mathbf{f}}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{\mathbf{f}}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Die Eigenvektoren bilden eine Basis des $\mathbb{R}^2$ und nach den Betrachtungen zu Beginn dieses Abschnittes ist die Matrix

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

zu bilden, wobei die Orthonormalität der Eigenvektoren

$$S^{-1} = S^T$$

liefert.

Ergebnis. Wird $\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2$ bzgl. der neuen Orthonormalbasis $(\underline{\mathbf{f}}^{(1)}, \underline{\mathbf{f}}^{(2)})$ dargestellt,

$$\underline{\mathbf{x}} = \alpha_1 \underline{\mathbf{f}}^{(1)} + \alpha_2 \underline{\mathbf{f}}^{(2)} \, , \qquad \alpha_1, \ \alpha_2 \in \mathbb{R} \, ,$$

so gilt wegen

$$\underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \quad \text{und wegen} \quad \underline{\mathbf{x}}^T = \big(x_1 \; x_2\big) = \big(\alpha_1 \; \alpha_2\big) S^T$$

die Beziehung

$$\underline{\mathbf{x}}^T \tilde{A} \underline{\mathbf{x}} = \big(\alpha_1 \; \alpha_2\big) \underbrace{S^T \tilde{A} S}_{=:B} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \big(\alpha_1 \; \alpha_2\big) B \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \, .$$

Aufgrund der Konstruktion hat B dabei automatisch Diagonalgestalt, d.h. auf der Hauptdiagonalen stehen die Eigenwerte und alle anderen Einträge verschwinden.

Es ist demnach (nachrechnen!)

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \, .$$

i) Geometrisch wird die Menge $\tilde{E}$ bzgl. der neuen Basis durch die Matrix B dargestellt, die mit der darstellenden Matrix A des ersten Beispiels bzgl. der kanonischen Basis überstimmt.

ii) Die neue Basis $(\tilde{f}^{(1)}, \tilde{f}^{(2)})$ entsteht aus der kanonischen Basis durch eine Rotation um $\pi/4$ und dementsprechend ist die Menge $\tilde{E}$ nichts anderes als die um $\pi/4$ rotierte Ellipse E (vgl. Abbildung 2).

iii) Zeigen die Achsen von E in Richtung der Koordinatenachsen als Richtungen der Eigenvektoren von A, so zeigen die Achsen von $\tilde{E}$ in Richtung der Eigenvektoren von $\tilde{A}$.

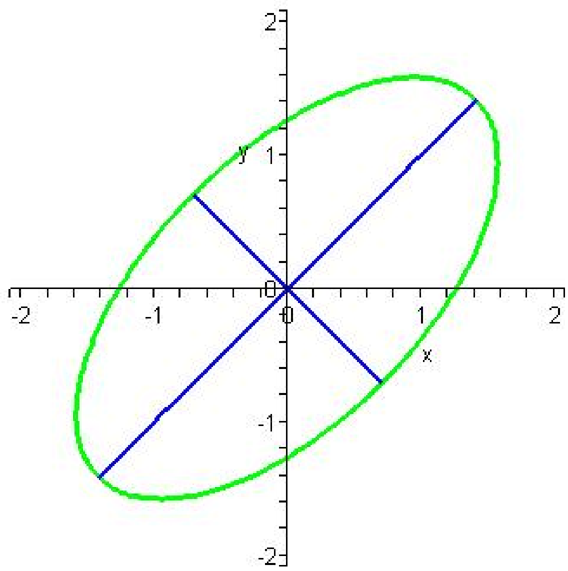

Abbildung 2: Die Ellipse $\tilde{E}$.

Zusammenfassung.

Definition 0.1. *Es sei $A \in M(n,n)$.*

i) Ein Vektor $\underline{\mathbf{v}} \neq \underline{\mathbf{0}}$ heißt Eigenvektor der Matrix A zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$, falls

$$A\underline{\mathbf{v}} = \lambda\underline{\mathbf{v}} \ .$$

ii) Dabei berechnen sich die möglichen Eigenwerte als Lösungen der Gleichung

$$\det\,(A - \lambda I_n) = 0 \ .$$

Bemerkung. Die Anzahl und die Vielfachheit der reellen Eigenwerte und die Dimension der Eigenräume, d.h. der Unterräume aller Eigenvektoren zu jedem Eigenwert, ist a priori nicht direkt ersichtlich.
Als Beispiel berechne man alle Eigenwerte und Eigenvektoren der 2×2 Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Im Spezialfall symmetrischer Matrizen ist die obige Konstruktion hingegen stets möglich.

Es gilt der Satz über die Hauptachsentransformation:

Satz 0.1. *Es sei $A \in M(n,n)$ symmetrisch. d.h. es gelte $A^T = A$.*

i) Dann gibt es eine orthogonale Matrix S, die A auf Diagonalgestalt transformiert

$$S^T A S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} .$$

ii) Dabei sind die λ_i, $i = 1, \dots, n$, reelle Eigenwerte von A (nicht notwendig verschieden) und die Spaltenvektoren der Transformationsmatrix S bilden eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren.