Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Dipl.–Math. Oliver Schirra

Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen I

Wintersemester 2009/10

Blatt 1

Abgabe: Donnerstag, 29.10.2009, vor der Vorlesung

Versehen Sie Ihre Lösungen mit Ihrem Namen. Mit einem (∗) gekennzeichnete Aufgaben werden in der Übung gemeinsam erarbeitet; die restlichen Aufgaben sind in schriftlicher Form abzugeben.

Aufgabe 1.

a) Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \,:\, x = 0\}$ offen und $u \in C^2(\Omega)$. Zeigen Sie, dass nach Transformation von Ω mittels Polarkoordinaten $\varphi : (0,\infty) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$, $(r,\theta) \mapsto \varphi(r,\theta)$ die Formel

$$\Delta u(x,y) = \frac{w_{\theta\theta}(r,\theta)}{r^2} + \frac{w_r(r,\theta)}{r} + w_{rr}(r,\theta) \quad \text{für alle} \quad (x,y) \in \Omega$$

gilt, wobei $w(r,\theta) := u(\varphi(r,\theta)) = u(x,y)$ ist.

b) Sei $\mathit{\Gamma} : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ $(n \geqslant 2)$ die *Fundamentallösung* der *Laplace–Gleichung*, gegeben durch

$$\mathit{\Gamma}(x) := c_n \begin{cases} |x|^{2-n} & ; \quad n > 2 \\ \log|x| & ; \quad n = 2 \end{cases} \qquad \text{mit} \quad c_n := \begin{cases} \big(n(2-n)\mathcal{L}^n(B_1)\big)^{-1} & ; \quad n > 2 \\ (2\pi)^{-1} & ; \quad n = 2. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $\mathit{\Gamma}$ tatsächlich die Laplace–Gleichung in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ löst.

c) Lösen Sie folgende Differentialgleichungen.

i) $4u_y + u_{xy} = 0$.

ii) $\left(1 + x^2\right) u_x + u_y = 0$.

Aufgabe 2. (∗)

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und mit genügend glattem Rand und $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Zeigen Sie:

$$\int_\Omega \Delta u \, \eta \, dx = -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \eta \, dx \quad \text{für alle} \quad \eta \in C^1_\circ(\Omega).$$

Aufgabe 3.

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u, v \in C^k(\Omega)$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie die *Formel von Leibniz*:

$$\partial^\alpha(uv) = \sum_{\nu \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\nu} \partial^\nu u \, \partial^{\alpha-\nu} v \quad \text{für alle} \quad \alpha \in \mathbb{N}_0^n \text{ mit } |\alpha| \leqslant k.$$

Dabei ist für $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$ und $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$

$$\partial^\alpha u(x) := \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}(x) \quad \text{mit} \quad |\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n.$$

Desweiteren sei für $\alpha, \nu \in \mathbb{N}_0^n$

$$\binom{\alpha}{\nu} := \frac{\alpha!}{\nu!\,(\alpha - \nu)!} \quad \text{mit} \quad \alpha! := \alpha_1! \cdots \alpha_n!$$

und $\nu \leqslant \alpha$, falls dies komponentenweise zutrifft.

Aufgabe 4.

Seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge und $f : \Omega \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$, *komplex differenzierbar* in Ω, d. h.

$$f'(z) := \lim_{w \to z} \frac{f(z) - f(w)}{z - w}$$

existiert für alle $z \in \Omega$.

a) Zeigen Sie, dass f im reellen Sinn (aufgefasst als Abbildung $\mathbb{R}^2 \supset \Omega \to \mathbb{R}^2$) total differenzierbar in Ω ist und die *Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen*

$$\partial_x u(z) = \partial_y v(z), \quad \partial_x v(z) = -\partial_y u(z)$$

für alle $z = x + iy \in \Omega$ gelten.

b) Seien die zweiten partiellen Ableitungen von u und v existent und stetig in Ω. Beweisen Sie, dass dann u und v harmonisch sind.

Die Übungsblätter sind auch auf unserer Homepage erhältlich:

`http://www.math.uni-sb.de/ag/fuchs/ag-fuchs.html/`