Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Dipl.–Math. Oliver Schirra

Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen I

Wintersemester 2009/10

Blatt 10 Abgabe: Donnerstag, 21.01.2010, vor der Vorlesung

Versehen Sie Ihre Lösungen mit Ihrem Namen. Mit einem ($*$) gekennzeichnete Aufgaben werden in der Übung gemeinsam erarbeitet; die restlichen Aufgaben sind in schriftlicher Form abzugeben.

Aufgabe 33.

a) Seien $B_R = B_R(x_0) \subset \mathbb{R}^n$ eine Kugel und $\beta \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass das (uneigentliche) Integral
$$\int_{B_R} |x - x_0|^\beta \, dx$$
genau dann existiert, wenn $\beta > -n$ ist.

b) **($*$)** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $(u_m) \subset C^1(\Omega)$ eine Folge, welche auf Ω gleichmäßig gegen eine Funktion u konvergiere. Zeigen Sie: Konvergiert $(\partial_k u_m)_m$ ($k \in \{1, \ldots, n\}$ fixiert) auf Ω gleichmäßig gegen eine Funktion v, so existiert $\partial_k u$ und es ist $\partial_k u = v$. Diese Aussage bleibt auch dann richtig, wenn die Konvergenzen lediglich lokal gelten. (*Hinweis*: Betrachten Sie Differenzenquotienten von u_m, d.h.
$$\Delta_h u_m(x) := \frac{u_m(x + he_k) - u_m(x)}{h}$$
für $x \in \Omega$ und $h \in \mathbb{R} - \{0\}$ genügend klein (sodass $x + he_k$ noch in Ω liegt). Wenden Sie den Mittelwertsatz auf $\Delta_h(u_m - u_l)(x)$ an. Folgern Sie, dass $(\Delta_h u_m)_m$ bei $m \to \infty$ gleichmäßig gegen $\Delta_h u$ konvergiert.)

c) Vervollständigen Sie den Beweis von Satz 1.2 aus § III.1 der Vorlesung, d.h. führen Sie die fehlenden Details aus.

Aufgabe 34. (∗)

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ und $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{spt}\eta \subset \overline{B}_1(0)$ und $\int_{\mathbb{R}^n} \eta\, dx = 1$. Für $\varepsilon > 0$ sei $\eta_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n}\eta(x/\varepsilon)$ $(x \in \mathbb{R}^n)$. Dann definiert man auf der Menge $\Omega_\varepsilon := \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$ (*innere Parallelmenge* zu Ω im Abstand ε) die sog. *Glättung* von u durch

$$u_\varepsilon(x) := \int_\Omega u(z)\eta_\varepsilon(z - x)\, dz \quad (x \in \Omega_\varepsilon).$$

Dabei heißt η_ε der *glättende Kern.* Zeigen Sie:

a) u_ε ist wohldefiniert und $u_\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$.

b) $u \in C^1(\Omega) \;\Rightarrow\; \partial_k u_\varepsilon = (\partial_k u)_\varepsilon$ für alle $k \in \{1, \ldots, n\}$.

c) Ist $\omega \Subset \Omega$, so gilt $\sup_\omega |u| \leqslant \sup_{\omega^\varepsilon} |u_\varepsilon|$, wobei $\omega^\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(x, \partial\omega) < \varepsilon\}$ die *äußere Parallelmenge* zu ω im Abstand ε ist, und ε so klein, dass $\omega^\varepsilon \Subset \Omega$ gilt.

d) Ist $u \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ für ein $\alpha \in (0, 1]$ (d.h. u lokal Hölder–stetig auf Ω), so ist für genügend kleine ε auch $u_\varepsilon \in C^{0,\alpha}(\Omega)$.

Die Übungsblätter sind auch auf unserer Homepage erhältlich:

`http://www.math.uni-sb.de/ag/fuchs/ag-fuchs.html/`