



Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen I  
Wintersemester 2009/10

Blatt 11

Abgabe: Donnerstag, 28.01.2010, vor der Vorlesung

---

Versehen Sie Ihre Lösungen mit Ihrem Namen. Mit einem (\*) gekennzeichnete Aufgaben werden in der Übung gemeinsam erarbeitet; die restlichen Aufgaben sind in schriftlicher Form abzugeben.

---

**Aufgabe 35. (\*)**

Seien  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $u \in C^2(\Omega)$  löse  $\Delta u = f$  in  $\Omega$ , wobei  $f \in C^{k,\alpha}(\Omega)$  für ein  $\alpha \in (0, 1)$  und ein  $k \in \mathbb{N}_0$  sei. In der Vorlesung wurde gezeigt (Satz 2.3 in § III.2): Ist  $f \in C^{1,\alpha}(\Omega)$ , so ist  $u \in C^{3,\alpha}(\Omega)$ . In dieser Aufgabe soll diese Aussage nochmals unter Verwendung von Glättungen (vgl. A. 34) bewiesen werden.

- a) A priori existiert  $\partial_\gamma \Delta u$  ( $\gamma \in \{1, \dots, n\}$ ) nicht. Betrachten Sie daher Glättungen  $u_\varepsilon$  von  $u$  und  $g_\varepsilon$  von  $g := \partial_\gamma f$  ( $\in C^{0,\alpha}(\Omega)$ ) bzgl. dem selben glättenden Kern. Zeigen Sie, dass für das Newton-Potential  $w_\varepsilon$  von  $g_\varepsilon$  auf  $\Omega_\varepsilon$  gilt:

$$\Delta(\partial_\gamma u_\varepsilon - w_\varepsilon) = 0 \text{ in } \omega$$

für jedes  $\omega \Subset \Omega$  und  $\varepsilon > 0$  genügend klein.

- b) Zeigen Sie, dass die Familie  $h_\varepsilon := \partial_\gamma u_\varepsilon - w_\varepsilon$  bei  $\varepsilon \searrow 0$  lokal gleichmäßig in  $\Omega$  gegen eine Funktion  $h \in C^{2,\alpha}(\Omega)$  konvergiert.
- c) Beweisen Sie  $\sup_{\varepsilon > 0} [D^2 w_\varepsilon]_{\alpha; \bar{\omega}} < \infty$  für alle  $\omega \Subset \Omega$ . Folgern Sie daraus die Behauptung  $u \in C^{3,\alpha}(\Omega)$ . (*Hinweis:* Satz 2.2 in § III.2 der Vorlesung, Satz von Arzelà–Ascoli. Beachten Sie, dass die Aussage von Satz 2.2 auch für beliebige  $\omega \Subset \Omega$ , und nicht nur für Kugeln gilt.)

Zeigen Sie schließlich, dass allgemeiner aus  $f \in C^{k,\alpha}(\Omega)$  bereits  $u \in C^{k+2,\alpha}(\Omega)$  folgt.

---

Im Folgenden seien  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet und  $L$  ein linearer Differentialoperator auf  $\Omega$  der Form

$$Lu := \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \partial_{ij}^2 u + \sum_{i=1}^n b_i(x) \partial_i u + c(x) u \quad (u \in C^2(\Omega))$$

mit gegebenen Funktionen  $a_{ij}, b_i, c : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ .

---

### Aufgabe 36.

Betrachten Sie den Differentialoperator  $L := \partial_x^2 + x \partial_y^2$  auf  $\Omega := (0, \infty) \times \mathbb{R}$ . Zeigen Sie:

a)  $L$  ist elliptisch, aber nicht gleichmäßig elliptisch auf  $\Omega$ .

b)  $L$  ist lokal gleichmäßig elliptisch auf  $\Omega$ .

---

### Aufgabe 37.

Seien  $\Omega \subset \mathbb{R}^n - \{0\}$  und  $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} - \{-1\}$  eine stetige Funktion. Betrachten Sie den Operator  $L$  mit

$$a_{ij}(x) := \delta_{ij} + g(|x|) \frac{x_i x_j}{|x|^2}, \quad b_i \equiv 0 \equiv c \quad (i, j \in \{1, \dots, n\}, x \in \Omega)$$

Zeigen Sie: Die Gleichung  $Lu = 0$  besitzt eine radialsymmetrische Lösung  $u = u(r)$  ( $r := |x|$ ), welche der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\frac{u''(r)}{u'(r)} = \frac{1-n}{r(1+g(r))}$$

genügt.

---

### Aufgabe 38. (\*)

Sei der Operator  $L$  gleichmäßig elliptisch auf  $\Omega := B_R(x_0) - \bar{B}_r(x_0)$  mit einem  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  und Radien  $0 < r < R$ . Es gelte  $a_{ii}/\lambda, b_i/\lambda, c/\lambda \in L^\infty(\Omega)$  (Notation wie in der Vorlesung) sowie  $c \leq 0$  in  $\Omega$ . Zeigen Sie, dass es ein  $\alpha > 0$  gibt derart, dass die Funktion  $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$v(x) := \exp(-\alpha|x - \xi|^2) - \exp(-\alpha R^2),$$

eine Sublösung für  $L$  ist.

---

Die Übungsblätter sind auch auf unserer Homepage erhältlich:

<http://www.math.uni-sb.de/ag/fuchs/ag-fuchs.html/>