



Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen I
Wintersemester 2009/10

Blatt 2

Abgabe: Donnerstag, 05.11.2009,
vor der Vorlesung

Versuchen Sie Ihre Lösungen mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer. Mit einem (*) gekennzeichnete Aufgaben werden in der Übung gemeinsam erarbeitet; die restlichen Aufgaben sind in schriftlicher Form abzugeben.

Aufgabe 5.

Seien Γ die Fundamentallösung der Laplace-Gleichung (vgl. A. 1) und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) eine offene und beschränkte Menge mit $\mathcal{L}^n(\Omega) > 0$. Beweisen Sie, dass die Abbildung $\mathbb{R}^n \ni x \mapsto \int_{\Omega} \Gamma(x-z) dz$ für $n \geq 3$ beschränkt ist, für $n = 2$ hingegen nicht. (*Hinweis:* Überlegen Sie sich im Fall $n \geq 3$ zunächst, dass es zu jedem $x \in \mathbb{R}^n$ eine Kugel B gibt mit $\mathcal{L}^n(B) = \mathcal{L}^n(\Omega)$ und $\int_{\Omega} \Gamma(x-z) dz \leq \int_B \Gamma(x-z) dz$.)

Für eine differenzierbare Abbildung (*Tensor*) $\tau := (\tau_{\alpha k}) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{nN}$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen) definiert man die *Vektordivergenz*

$$\operatorname{div} \tau := \sum_{\alpha=1}^n \partial_{\alpha} \tau_{\alpha} = \left(\sum_{\alpha=1}^n \partial_{\alpha} \tau_{\alpha k} \right)_{k=1, \dots, N} \in \mathbb{R}^N.$$

Für $P := (P_{\alpha k}), Q := (Q_{\alpha k}) \in \mathbb{R}^{nN} \cong \mathbb{R}^{n \times N}$ wird durch die Vorschrift $P : Q := \sum_{\alpha, k=1}^{n, N} P_{\alpha k} Q_{\alpha k}$ ein Skalarprodukt auf dem Vektorraum der $(n \times N)$ -Matrizen erklärt (*kanonisches Skalarprodukt*). Die von diesem Skalarprodukt induzierte Norm ist gegeben durch $|P| := \sqrt{P : P}$.

Aufgabe 6.

Betrachten Sie die Abbildung $\pi : \mathbb{R}^n - \{0\} \rightarrow S^{n-1} = \partial B_1(0)$, $x \mapsto x/|x|$.

- Welche geometrische Bedeutung hat π ?
- Ist π im Ursprung stetig fortsetzbar?
- Zeigen Sie: $\nabla \pi(x) = \frac{1}{|x|} \left(I_n - \frac{x \otimes x}{|x|^2} \right)$ für alle $x \neq 0$ und $\nabla \pi(x)y = y - (x \cdot y)x$ für alle $x \in S^{n-1}$ und $y \in \mathbb{R}^n$.

d) Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in C^1(\Omega; S^{n-1})$. Zeigen Sie: $\pi \circ u \in C^1(\Omega; S^{n-1})$ und

$$\nabla u : \frac{d}{dt} \Big|_0 \nabla [\pi \circ (u + t\eta)] = \nabla u : \nabla [\nabla(\pi \circ u)\eta]$$

für alle $\eta \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$.

Dabei ist $I_n = (\delta_{ij})_{ij} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Einheitsmatrix und $x \otimes y := (x_i y_j)_{ij} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ das *dyadische Produkt* von $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Aufgabe 7.

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) offen und beschränkt, $2 \leq p < \infty$ und $u_0 \in C^0(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^N)$ ($N \geq 1$). Betrachten Sie das Funktional $J : \mathbb{K} \rightarrow \bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$,

$$J[w] := \int_{\Omega} |\nabla w|^p dx,$$

über der Funktionenklasse $\mathbb{K} := \{w \in C^2(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^N) : w = u_0 \text{ auf } \partial\Omega\}$. Zeigen Sie:

- J ist wohldefiniert und $\inf_{w \in \mathbb{K}} J[w]$ existiert.
- Ist $u \in \mathbb{K}$ eine Lösung des Variationsproblems $J \rightarrow \min$ in \mathbb{K} , so löst u die nichtlineare, partielle Differentialgleichung

$$\operatorname{div} (|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = 0.$$

- (*) Ist $u \in \bar{\mathbb{K}} := \mathbb{K} \cap \{w : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^N : w(\bar{\Omega}) \subset S^{N-1}\}$ eine Lösung des Variationsproblems $J \rightarrow \min$ in $\bar{\mathbb{K}}$, so gilt

$$\operatorname{div} (|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = -|\nabla u|^p u.$$

Aufgabe 8. (*)

Man zeige, dass jede harmonische Funktion $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit beschränkter Ableitung *affin-linear* ist, d. h. es gibt Konstanten $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ mit

$$u(x, y) = \alpha x + \beta y + \gamma \quad \text{für alle } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

(*Hinweis:* Satz von Liouville.)

Die Übungsblätter sind auch auf unserer Homepage erhältlich:

<http://www.math.uni-sb.de/ag/fuchs/ag-fuchs.html/>