Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Dipl.–Math. Oliver Schirra

Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen I

Wintersemester 2009/10

Blatt 3 Abgabe: Donnerstag, 12.11.2009, vor der Vorlesung

Versehen Sie Ihre Lösungen mit Ihrem Namen. Mit einem $(*)$ gekennzeichnete Aufgaben werden in der Übung gemeinsam erarbeitet; die restlichen Aufgaben sind in schriftlicher Form abzugeben.

Aufgabe 9.

a) Für $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ sei $r := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Bestimmen Sie die nur von r abhängigen Lösungen $u : \mathbb{R}^3 - \{0\} \to \mathbb{R}$ der Gleichung $\Delta u = \kappa^2 u$ ($\kappa \in \mathbb{R},\ u = f(r)$). (*Hinweis*: Substituieren Sie $w := ru$.)

b) Sei $r := \sqrt{x^2 + y^2}$ für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Man zeige, dass die nur von r abhängigen Lösungen $u : \mathbb{R}^2 - \{0\} \to \mathbb{R}$ der Gleichung $u_{xx} + u_{yy} = -\kappa^2 u$ ($\kappa \in \mathbb{R}$) einer *Besselschen Differentialgleichung* der Form

$$w'' + \frac{w'}{t} + w = 0 \quad (t \neq 0)$$

genügen.

Aufgabe 10.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und mit genügend glattem Rand. Betrachten Sie das *Dirichlet–Problem* zur *Poisson–Gleichung*

$$\Delta u = f \text{ in } \Omega, \quad u = u_0 \text{ auf } \partial\Omega \tag{$\diamond$}$$

für Funktionen $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$. Dabei seien Funktionen $f \in C^0(\Omega)$ und $u_0 \in C^0(\overline{\Omega})$ vorgegeben. Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ eine Lösung von $(\diamond)$. Beweisen Sie mittels der sog. *Energieintegral–Methode*, dass u eindeutig bestimmt ist: Betrachten Sie $w := u - v$ mit einer weiteren Lösung v von $(\diamond)$, multiplizieren die Laplace–Gleichung für w mit w selbst, und wenden den Satz von Gauß an.

Aufgabe 11.

Sei $\Omega := B_1(0)$. Betrachten Sie das Funktional J aus A. 7 mit $p = 2$ und $N = n \geqslant 3$. Gibt man als Randwerte $u_0(x) := x$ vor, so gibt es aus topologischen Gründen keine stetige Funktion $u : \overline{\Omega} \to S^{n-1}$ mit $u = u_0$ auf $\partial\Omega$. (Diese Aussage ist in der Literatur als „No–Retraction–Theorem" bekannt; vgl. etwa [Mi], Lemma 5 in § 2.) Demnach kann das Variationsproblem $J[w] \to \min$ in $\overline{\mathbb{K}}$ zu diesen Randwerten keine Lösung besitzen. Man kann aber zeigen (sollen Sie hier nicht tun), dass die sog. *Standardsingularität* $\bar{u} : \overline{\Omega} - \{0\} \to \mathbb{R}^n$, $\bar{u}(x) := x/|x|$ in einem verallgemeinerten Sinn die eindeutige Minimalstelle von J in $\overline{\mathbb{K}}$ zu diesen Randwerten ist. Zeigen Sie:

a) Für jedes $\eta \in C_\circ^\infty(\Omega; \mathbb{R}^n)$ ist

$$\int_\Omega \operatorname{div}\left(\frac{\eta}{|x|}\right) dx = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon} \operatorname{div}\left(\frac{\eta}{|x|}\right) dx,$$

wobei $\Omega_\varepsilon := \Omega - B_\varepsilon(0)$ ist. (*Hinweis*: Satz von Gauß.)

b) **(∗)** $\bar{u}$ ist eine verallgemeinerte (schwache) Lösung der Differentialgleichung aus A. 7 c) (mit $p = 2$), d. h. es gilt:

$$\int_\Omega \nabla\bar{u} : \nabla\eta \, dx = \int_\Omega |\nabla\bar{u}|^2 \, \bar{u} \cdot \eta \, dx \quad \text{für alle} \quad \eta \in C_\circ^\infty(\Omega; \mathbb{R}^n).$$

Aufgabe 12. (∗)

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u : \Omega \to \mathbb{R}$ eine in $\xi \in \Omega$ stetige Funktion. Beweisen Sie:

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \fint_{\partial B_\varepsilon(\xi)} u(x) \, d\mathcal{H}^{n-1}(x) = u(\xi).$$

Darin bezeichnet $\mathcal{H}^{n-1}$ das $(n-1)$–dimensionale *Hausdorff–Maß* (Oberfächenmaß) und $\fint_{\partial B_\varepsilon(\xi)} u(x) \, d\mathcal{H}^{n-1}(x)$ den *sphärischen Mittelwert* von u auf der Sphäre $\partial B_\varepsilon(\xi)$, d. h.

$$\fint_{\partial B_\varepsilon(\xi)} u(x) \, d\mathcal{H}^{n-1}(x) := \frac{1}{\mathcal{H}^{n-1}(\partial B_\varepsilon)} \int_{\partial B_\varepsilon(\xi)} u(x) \, d\mathcal{H}^{n-1}(x).$$

Die Übungsblätter sind auch auf unserer Homepage erhältlich:

`http://www.math.uni-sb.de/ag/fuchs/ag-fuchs.html/`