



Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen I
Wintersemester 2009/10

Blatt 4

Abgabe: Donnerstag, 19.11.2009, vor der Vorlesung

Versehen Sie Ihre Lösungen mit Ihrem Namen. Mit einem (*) gekennzeichnete Aufgaben werden in der Übung gemeinsam erarbeitet; die restlichen Aufgaben sind in schriftlicher Form abzugeben.

Aufgabe 13. (*)

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und mit genügend glattem Rand sowie $u \in C^2(\bar{\Omega})$. Dann gilt:

$$\int_{\partial\Omega} (u(z) \partial_{\mathcal{N}} \Gamma(x-z) - \partial_{\mathcal{N}} u(z) \Gamma(x-z)) d\mathcal{H}^{n-1}(z) + \int_{\Omega} \Delta u(z) \Gamma(x-z) dz = U(x),$$

wobei

$$U(x) := \begin{cases} u(x) & ; x \in \Omega \\ u(x)/2 & ; x \in \partial\Omega \\ 0 & ; x \in \mathbb{R}^n - \bar{\Omega}. \end{cases}$$

Darin bezeichnen Γ die Fundamentallösung der Laplace-Gleichung (vgl. A. 1) und \mathcal{N} das äußere Einheitsnormalenfeld an $\partial\Omega$. In der Vorlesung wurde der Fall $x \in \Omega$ bereits behandelt; siehe Satz 1.3 in § II.1. Beweisen Sie die verbleibenden Fälle analog.

Aufgabe 14.

a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Zeigen Sie: Ist $u \in C^2(\Omega)$ subharmonisch (d.h. $\Delta u \geq 0$ in Ω), so gilt

$$u(x) \leq \int_{B_R(x)} u(z) dz \quad \text{und} \quad u(x) \leq \int_{\partial B_R(x)} u(z) d\mathcal{H}^{n-1}(z)$$

für alle Kugeln $B_R(x) \Subset \Omega$ ist.

b) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Beweisen Sie das Maximumprinzip für subharmonische Funktionen: Ist $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ subharmonisch, so ist $\sup_{\Omega} u = \max_{\partial\Omega} u$. (Hinweis: Betrachten Sie die Menge $\Omega_M := \{x \in \Omega : u(x) = M := \sup_{\Omega} u\}$, und zeigen Sie $\Omega_M = \Omega$.)

- c) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Zeigen Sie: Ist $u \in C^2(\Omega)$ harmonisch und $f : u(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ konvex und C^2 , so ist $f \circ u$ subharmonisch.
-

Aufgabe 15.

Es bezeichne $D \subset \mathbb{R}^2$ die offene Einheitskreisscheibe.

- a) Zeigen Sie, dass die Funktion $D \ni (x, y) \mapsto \frac{1-x^2-y^2}{1-2x+x^2+y^2}$ harmonisch ist.
- b) Untersuchen Sie, ob das Maximumprinzip für die Funktion aus Teil a) gilt.
-

Die Übungsblätter sind auch auf unserer Homepage erhältlich:

<http://www.math.uni-sb.de/ag/fuchs/ag-fuchs.html/>