Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Dipl.–Math. Oliver Schirra

Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen I

Wintersemester 2009/10

Blatt 5 Abgabe: Donnerstag, 03.12.2009, vor der Vorlesung

Versehen Sie Ihre Lösungen mit Ihrem Namen. Mit einem $(*)$ gekennzeichnete Aufgaben werden in der Übung gemeinsam erarbeitet; die restlichen Aufgaben sind in schriftlicher Form abzugeben.

Aufgabe 16.

Lösen Sie die Laplace–Gleichung $\Delta u = 0$ auf $\Omega = [\,0,1\,]^2$ zu den Randwerten

$$u(0,y) = u(1,y) = u(x,0) = 0 \quad \text{und} \quad u(x,1) = \sin(\pi x) \quad (x,y \in [0,1]).$$

(*Hinweis*: Separationsansatz $u(x,y) = f(x)g(y)$.)

Aufgabe 17.

Für eine Kugel $B_R(\xi) \subset \mathbb{R}^n$ sei $\Phi := \Phi_{\xi,R} : \mathbb{R}^n \setminus \{\xi\} \to \mathbb{R}^n$ die *Inversion (Spiegelung) an der Sphäre* $\partial B_R(\xi)$ (vgl. § II.2 der Vorlesung). Ferner sei $\Omega^* := \Phi(\Omega)$ für eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n \setminus \{\xi\}$, und $u : \Omega \to \mathbb{R}$ sei eine harmonische Funktion. Zeigen Sie:

a) Φ ist eine *Involution* (d.h. es ist $\Phi \circ \Phi = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n \setminus \{\xi\}}$), welche der Beziehung

$$|x - \xi||\Phi(x) - \xi| = R^2 \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\xi\}$$

genügt.

b) Die Inversion an einer Kreislinie um $\xi \in \mathbb{R}^2$ ist harmonisch in $\mathbb{R}^2 \setminus \{\xi\}$.

c) **(∗)** Die *Kelvin–Transformierte* $u^* : \Omega^* \to \mathbb{R}$ bzgl. $\partial B_R(\xi)$ (vgl. § II.2 der Vorlesung) von u ist harmonisch.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Eine Funktion $G(x, y)$, welche für $x, y \in \overline{\Omega}$, $x \neq y$, definiert ist, heißt eine *Green–Funktion* von Ω, falls die Funktion $h : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, $h(y) := \mathit{\Gamma}(x - y) - G(x, y)$ für jedes fixierte $x \in \Omega$ folgende Eigenschaften hat:

$$\Delta h(y) = 0 \text{ für alle } y \in \Omega, \quad h(y) = \Gamma(x - y) \text{ für alle } y \in \partial\Omega,$$

wobei $\mathit{\Gamma}$ die Fundamentallösung der Laplace–Gleichung bezeichnet.

Aufgabe 18.

Sei $\mathbb{R}^n_+ := \big\{x := (x', x_n) \in \mathbb{R}^n \,:\, x_n > 0\big\}$ $(n \geqslant 2)$ der *obere Halbraum*. Wir bezeichnen mit x^* den zu x gehörigen Spiegelungspunkt bzgl. der Hyperebene $\mathbb{R}^n_0 := \partial\mathbb{R}^n_+ = \mathbb{R}^{n-1}$.

a) Zeigen Sie, dass $G(x, y) := \mathit{\Gamma}(x - y) - \mathit{\Gamma}(x^* - y)$ $(x, y \in \overline{\mathbb{R}^n_+}, x \neq y)$ eine Green–Funktion auf $\mathbb{R}^n_+$ ist.

b) Berechnen Sie die Normalableitung von $y \mapsto G(\,\cdot\,, y)$.

c) **(∗)** Sei $u_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^n_0)$ eine beschränkte Funktion, und sei

$$u(x) := \frac{2x_n}{n\mathcal{L}^n(B_1)} \int_{\mathbb{R}^n_0} \frac{u_0(y)}{\big(|x' - y|^2 + x_n^2\big)^{\frac{n}{2}}}\, dy \quad (x \in \mathbb{R}^n_+).$$

Beweisen Sie, dass u wohldefiniert ist und folgende Eigenschaften besitzt:

i) u ist beschränkt und gehört zur Klasse $C^\infty(\mathbb{R}^n_+)$.

ii) $\Delta u = 0$ in $\mathbb{R}^n_+$.

iii) $\lim\limits_{x \to \xi} u(x) = u_0(\xi)$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n_0$.

(*Hinweis*: Benutzen Sie ohne Beweis die Identität $\int_{\mathbb{R}^n_0} (1 + |z|^2)^{-\frac{n}{2}}\, dz = 1$, und gehen Sie ähnlich vor wie im Beweis von Satz 2.2 in § II.2 der Vorlesung.)

Die Übungsblätter sind auch auf unserer Homepage erhältlich:

`http://www.math.uni-sb.de/ag/fuchs/ag-fuchs.html/`