



Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen I
Wintersemester 2009/10

Blatt 6

Abgabe: Donnerstag, 10.12.2009, vor der Vorlesung

Versehen Sie Ihre Lösungen mit Ihrem Namen. Mit einem (*) gekennzeichnete Aufgaben werden in der Übung gemeinsam erarbeitet; die restlichen Aufgaben sind in schriftlicher Form abzugeben.

Aufgabe 19.

- a) Sei $u : B_R(0) \rightarrow [0, \infty)$ ($R > 0$) eine harmonische Funktion. Beweisen Sie folgende Version der *Ungleichung von Harnack*:

$$\frac{R - |x|}{(R + |x|)^{n-1}} R^{n-2} u(0) \leq u(x) \leq \frac{R + |x|}{(R - |x|)^{n-1}} R^{n-2} u(0) \quad \text{für alle } x \in B_R(0).$$

(*Hinweis*: Poisson-Formel, Mittelwerteigenschaft.)

- b) (*) Jede harmonische Funktion $u : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ ist konstant.
-

Aufgabe 20.

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^3 - \{0\}$ offen und $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ harmonisch.

- a) Zeigen Sie, dass $v(x) := \frac{1}{|x|} u\left(\frac{x}{|x|^2}\right)$ in $\Omega^* := \{x \in \mathbb{R}^3 : x/|x|^2 \in \Omega\}$ harmonisch ist.
- b) Gibt es einen tieferen Grund für die Aussage aus a)? Gilt ein analoges Resultat in beliebiger Dimension $n \geq 2$?
-

Aufgabe 21.

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u : \Omega \rightarrow [0, \infty)$ harmonisch.

- a) Sei $B_{4R}(x_0) \subset \Omega$ ($R > 0$). Zeigen Sie unter Verwendung der Mittelwerteigenschaft: $u(x) \leq 3^n u(y)$ für alle $x, y \in B_R(x_0)$ gilt.

- b) (*) Seien $\omega \Subset \Omega$ ein Gebiet und $x_1, x_2 \in \omega$ so gewählt, dass $u(x_1) = \sup_{\omega} u$ und $u(x_2) = \inf_{\omega} u$. Denken Sie sich eine Kurve γ von x_1 nach x_2 , deren Spur in $\bar{\omega}$ liegt, durch N Kugeln mit Radius $R < \text{dist}(\gamma, \partial\Omega)/4$ und Zentren in ω überdeckt. Zeigen Sie: $u(x_1) \leq 3^{nN}u(x_2)$.
-

Aufgabe 22. (*)

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $(h_m) \subset C^2(\Omega)$ eine Folge harmonischer Funktionen, welche lokal gleichmäßig in Ω gegen eine Funktion $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ strebt. Beweisen Sie:

- a) h ist harmonisch in Ω . (*Hinweis:* Betrachten Sie für eine fixierte Kugel $B \Subset \Omega$ die Funktionenfolge

$$B \ni x \mapsto \int_{\partial B} P_B(x; y) h_m(y) d\mathcal{H}^{n-1}(y),$$

wobei $P_B(x; \cdot)$ der *Poisson-Kern* zu B in x ist, und zeigen Sie $\Delta h = 0$ in B . Die Behauptung folgt dann aus dem Identitätssatz für reell analytische Funktionen.)

- b) $\partial^\alpha h_m \xrightarrow{m} \partial^\alpha h$ lokal gleichmäßig in Ω für alle Multiindizes $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$.
-

Die Übungsblätter sind auch auf unserer Homepage erhältlich:

<http://www.math.uni-sb.de/ag/fuchs/ag-fuchs.html/>