



Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen I
Wintersemester 2009/10

Blatt 7

Abgabe: Donnerstag, 17.12.2009, vor der Vorlesung

Versehen Sie Ihre Lösungen mit Ihrem Namen. Mit einem (*) gekennzeichnete Aufgaben werden in der Übung gemeinsam erarbeitet; die restlichen Aufgaben sind in schriftlicher Form abzugeben.

Aufgabe 23.

Beweisen Sie den *Konvergenzsatz von Harnack*: Sei (u_m) eine monoton wachsende Folge harmonischer Funktionen $u_m : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen). Es gebe ein $\xi \in \Omega$, so dass die Folge $(u_m(\xi))$ beschränkt ist. Dann konvergiert (u_m) auf Ω *lokal gleichmäßig* gegen eine auf Ω harmonische Funktion u , d.h. es gilt $u_m \xrightarrow{m} u$ gleichmäßig auf jedem Teilgebiet $\omega \Subset \Omega$. (*Hinweis*: Ist $w : \Omega \rightarrow [0, \infty)$ harmonisch, so gibt es eine positive Konstante $c = c(n, \omega, \Omega)$ mit $\sup_\omega w \leq \inf_\omega w$; vgl. A. 21. Zeigen Sie damit, dass (u_m) eine gleichmäßige Cauchy-Folge ist.)

Aufgabe 24.

Seien $\Omega := \mathbb{R}^n - \bar{B}_1(0)$ und $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ harmonisch in Ω mit $\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0$. Zeigen Sie:

$$\sup_{x \in \Omega} |u(x)| = \sup_{x \in \partial\Omega} |u(x)|$$

(*Hinweis*: Wenden Sie das Maximumprinzip für harmonische Funktionen auf dem Gebiet $\Omega' := B_R(0) - \bar{B}_1(0)$ mit einem geeigneten Radius $R > 1$ an.)

Im folgenden sei $\mathbb{R}_+^n := \{x := (x', x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$ der obere Halbraum bzgl. der Hyperebene $\mathbb{R}_0^n := \partial\mathbb{R}_+^n$. Entsprechend sei mit \mathbb{R}_-^n der untere Halbraum bezeichnet. Zu einem Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ sei x^* der zugehörige Spiegelungspunkt bzgl. \mathbb{R}_0^n . Für eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ seien ferner $\Omega_\pm := \Omega \cap \mathbb{R}_\pm^n$, $\Omega_0 := \Omega \cap \mathbb{R}_0^n$ sowie $\Omega^* := \{x^* \in \mathbb{R}^n : x \in \Omega\}$.

Aufgabe 25. (*)

In dieser Aufgabe soll das *Spiegelungsprinzip von Schwarz* bewiesen werden. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und *spiegelsymmetrisch*, d.h. $\Omega^* = \Omega$.

- a) Zeigen Sie: Ist $u \in C^2(\Omega_+) \cap C^0(\Omega_+ \cup \Omega_0)$ harmonisch in Ω_+ mit $u|_{\Omega_0} = 0$, so ist $\bar{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\bar{u}(x) := \begin{cases} u(x) & ; \quad x \in \Omega_+ \cup \Omega_0 \\ -u(x^*) & ; \quad x \in \Omega_- \end{cases}$$

die eindeutig bestimmte harmonische Fortsetzung von u auf ganz Ω . (*Hinweis*: Eine C^2 -Funktion ist genau dann harmonisch, wenn sie die lokale Mittelwerteigenschaft hat.)

- b) Zeigen Sie: Ist $u \in C^2(\Omega_+) \cap C^1(\Omega_+ \cup \Omega_0)$ harmonisch in Ω^+ mit $\partial_{x_n} u|_{\Omega_0} = 0$, so ist $\hat{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\hat{u}(x) := \begin{cases} u(x) & ; \quad x \in \Omega_+ \cup \Omega_0 \\ u(x^*) & ; \quad x \in \Omega_- \end{cases}$$

die eindeutig bestimmte harmonische Fortsetzung von u auf ganz Ω . (*Hinweis*: Berechnen Sie $\frac{d}{dt} \left(\int_{te_n + B_r(x)} \hat{u}(z) dz \right)$ für $x \in \Omega_0$, wobei r und t so klein sind, dass $te_n + B_r(x) \Subset \Omega^+$ ist.)

- c) Ist $u \in C^2(\Omega_+) \cap C^1(\Omega_+ \cup \Omega_0)$ harmonisch in Ω_+ mit $u|_{\Omega_0} = 0 = \partial_{x_n} u|_{\Omega_0}$, so kann man u gemäß a) und b) sowohl *ungerade* als auch *gerade* nach Ω_- harmonisch fortsetzen. Ist das ein Widerspruch?

Die Übungsblätter sind auch auf unserer Homepage erhältlich:

<http://www.math.uni-sb.de/ag/fuchs/ag-fuchs.html/>