



Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen I
Wintersemester 2009/10

Blatt 8

Abgabe: Donnerstag, 07.01.2010, vor der Vorlesung

Versehen Sie Ihre Lösungen mit Ihrem Namen. Mit einem (*) gekennzeichnete Aufgaben werden in der Übung gemeinsam erarbeitet; die restlichen Aufgaben sind in schriftlicher Form abzugeben.

Aufgabe 26.

Zeigen Sie, dass die Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$ rotationsinvariant ist, d.h. ist $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ harmonisch und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine orthogonale Matrix, so ist auch $v(x) := u(Ax)$ harmonisch.

Aufgabe 27.

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) offen, $x_0 \in \Omega$ und $h : \Omega - \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ harmonisch mit

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h(x)}{\Gamma(x - x_0)} = 0.$$

Zeigen Sie, dass h nach x_0 harmonisch fortsetzbar ist (vgl. Satz 3.3 in § II.3 der Vorlesung).

Eine Funktion $u \in C^0(\Omega)$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen) heißt *subharmonisch* (*superharmonisch*) auf Ω , falls für jede Kugel $B \Subset \Omega$ gilt: Für jede Funktion $h \in C^2(B) \cap C^0(\overline{B})$ mit $\nabla h = 0$ in B und $u \leq h$ (bzw. $u \geq h$) auf ∂B gilt $u \leq h$ (bzw. $u \geq h$) in B .

Aufgabe 28.

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in C^0(\Omega)$. Zeigen Sie:

- Ist u subharmonisch (superharmonisch) auf Ω und $v \in C^2(\Omega)$ harmonisch, so ist $u + v$ subharmonisch (superharmonisch) auf Ω .
- (*) Folgende Aussagen sind äquivalent:

- i) u ist superharmonisch auf Ω .
ii) Für jede Kugel $B_r(x) \Subset \Omega$ ist

$$u(x) \geq \int_{\partial B_r(x)} u(z) d\mathcal{H}^{n-1}(z).$$

- iii) Für jede Kugel $B_r(x) \Subset \Omega$ ist

$$u(x) \geq \int_{B_r(x)} u(z) dz.$$

Aufgabe 29.

Seien $u, v \in C^0(\Omega)$ superharmonisch auf Ω und sei $c > 0$. Zeigen Sie:

- a) cu ist superharmonisch, $-cu$ ist subharmonisch.
b) $u + v$ ist superharmonisch.
c) $\min\{u, v\}$ ist superharmonisch.
-

Die Übungsblätter sind auch auf unserer Homepage erhältlich:

<http://www.math.uni-sb.de/ag/fuchs/ag-fuchs.html/>

Frohe Weihnachten und viel Erfolg im neuen Jahr!