Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Dipl.–Math. Oliver Schirra

Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen I

Wintersemester 2009/10

Blatt 9 Abgabe: Donnerstag, 14.01.2010, vor der Vorlesung

Versehen Sie Ihre Lösungen mit Ihrem Namen. Mit einem (∗) gekennzeichnete Aufgaben werden in der Übung gemeinsam erarbeitet; die restlichen Aufgaben sind in schriftlicher Form abzugeben.

Aufgabe 30.

Sei $u \in C^0(\mathbb{R}^n)$ eine subharmonische Funktion mit $\lim_{|x|\to\infty} u(x) \leqslant 0$. Beweisen Sie: $u \leqslant 0$ in $\mathbb{R}^n$. (*Hinweis*: Betrachten Sie eine Folge (x_m) mit $u(x_m) \xrightarrow{m} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} u(x)$ und benutzen Sie das Maximumprinzip für subharmonische Funktionen.)

Aufgabe 31. (∗)

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $B \Subset \Omega$ eine offene Kugel. Für eine Funktion $u \in C^0(\Omega)$ und eine auf B harmonische Funktion h mit Randwerten $u|_{\partial B}$ definiert man den *Perron–Projektor* (*harmonischer Lift*):

$$U(x) := \begin{cases} h(x) & ; \quad x \in B, \\ u(x) & ; \quad x \in \Omega - B. \end{cases}$$

Zeigen Sie: Es ist $U \in C^0(\Omega)$ und es gilt

$$u \text{ subharmonisch auf } \Omega \quad \Longrightarrow \quad U \text{ subharmonisch auf } \Omega.$$

(*Hinweis*: Betrachten Sie für eine beliebige Kugel $B' \Subset \Omega$ eine auf B' harmonische Funktion $h' \in C^0(\overline{B'})$ mit $U \leqslant h'$ auf $\partial B'$, und zeigen Sie $U \leqslant h'$ auf B'; vgl. § II.4 der Vorlesung.)

Aufgabe 32. (*)

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, und sei $w = w_\xi$ eine *lokale Barriere* in einem Punkt $\xi \in \partial\Omega$. Zeigen Sie, dass es in ξ eine *globale Barriere* gibt. (*Hinweis*: Sei $B_r(\xi)$ eine Kugel, sodass w bzgl. $B_r(\xi)$ eine globale Barriere ist. Betrachten Sie die Funktion $\widetilde{w} = \widetilde{w}_\xi : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$,

$$x \mapsto \begin{cases} \min\{w(x), \gamma\} & ; \quad x \in \overline{\Omega} \cap B_{r/2}(\xi) \\ \gamma & ; \quad \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $\gamma := \inf\{w(x) \ : \ x \in \overline{\Omega} \cap \overline{A}_r(\xi)\} > 0$ und $A_r(\xi) := B_r(\xi) - \overline{B}_{r/2}(\xi)$ ist. Zum Nachweis der Superharmonizität von $\widetilde{w}$ betrachte man für eine beliebige Kugel $B \Subset \Omega$ eine auf B harmonische Funktion $h \in C^0(\overline{B})$ und gehe ähnlich wie in A. 31 vor.)

Die Übungsblätter sind auch auf unserer Homepage erhältlich:

`http://www.math.uni-sb.de/ag/fuchs/ag-fuchs.html/`