Es gilt nun

<u>Satz 1.1</u> : $L^p(X,\lambda)$ ist ein linearer Raum, der durch $\|\cdot\|_p$ normiert wird. $L^p(X,\lambda)$ ist versehen mit dieser Norm ein Banach Raum.

Beweis: Die folgenden Aussagen sind klar:

- $L^1(X,\lambda)$ ist mit $\|\cdot\|_1$ ein normierter Raum
- $\|u\|_p = 0 \implies u = 0 \quad \forall\, 1 \le p < \infty$,

wobei die 2te Feststellung unsere Äquivalenzklassendefinition benutzt. Im nächsten Schritt überlegen wir uns

$$\left\{ \begin{array}{l} u, v \in L^p(X,\lambda) \implies u+v \in L^p(X,\lambda) \\ \text{mit zugehöriger Dreiecksungleichung.} \end{array} \right.$$

Dies geschieht mit zwei Hilfssätzen, die wir "für Summen statt Integrale" schon kennen.

<u>Lemma a:</u> (<u>Hölder Ungleichung</u>)

Sei $p \in (1,\infty)$ und $q := p/_{p-1}$, also $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$. Dann gilt für $u \in L^p(X,\lambda)$, $v \in L^q(X,\lambda)$: das Produkt uv ist integrierbar mit $\int_X |uv|\, d\lambda \le \|u\|_p \|v\|_q$.

<u>Bemerkung</u>: 1) Als direkte Anwendung bekommt man

> Gilt $\lambda(X) < \infty$ (d.h. $1 \in L^1(X,\lambda)$) und ist $u \in L^p(X,\lambda)$, so folgt $u \in L^t(X,\lambda)$ für alle $1 \leq t \leq p$.

Man überlege sich für $X = \mathbb{R}$ und $\lambda = \mathcal{L}^1$ "Gegenbeispiele", die zeigen, daß $\lambda(X) < \infty$ keine unnötige Voraussetzung ist.

2) Es gilt „$=$" in der Hölder Ungleichung, wenn $|u| = c\,|v|$ mit einem $c \geq 0$.

Beweis von Lemma a: Seien $a, b, \alpha, \beta > 0$ mit $\alpha + \beta = 1$. Da $\ln$ eine konkave Funktion ist, gilt

$$\ln(\alpha a + \beta b) \geq \alpha \ln a + \beta \ln b \quad \overset{\exp}{\Longrightarrow}$$

$$\alpha a + \beta b \geq a^\alpha b^\beta .$$

Mit $\alpha = 1/p$, $\beta = 1/q$, $a = x^{1/\alpha}$, $b = y^{1/\beta}$ $(x, y > 0)$ wird daraus

$$* \qquad x\, y \leq \frac{1}{p} x^p + \frac{1}{q} y^q \qquad \forall\, x, y > 0,$$

und natürlich gilt $*$ auch für $x, y \geq 0$. Zum Beweis der Hölder Ungleichung dürfen wir O.E. $\|u\|_p, \|v\|_q > 0$ annehmen, sonst ist alles klar. Mit $x := \frac{1}{\|u\|_p}|u|$, $y := \frac{1}{\|v\|_q}|v|$ folgt aus $*$ λ - f.ü.

$$\frac{1}{\|u\|_p}\frac{1}{\|v\|_q}|uv| \le \frac{1}{p}\frac{|u|^p}{\|u\|_p^p} + \frac{1}{q}\frac{|v|^q}{\|v\|_q^q} \xrightarrow{\int \ldots d\lambda}$$

$$\frac{1}{\|u\|_p}\frac{1}{\|v\|_q}\int_X |uv|\,d\lambda \le \frac{1}{p}\frac{1}{\|u\|_p^p}\int_X |u|^p d\lambda + \frac{1}{q}\frac{1}{\|v\|_q^q}\int_X |v|^q d\lambda$$

$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 .$$

$\square$

Lemma b (Minkowski Dreiecksungleichung)

Sei $1 \le p < \infty$. Mit u und v gehört $u+v$ zu $L^p(X,\lambda)$ und

$\|u+v\|_p \le \|u\|_p + \|v\|_p$.

Beweis: O.E. sei $p > 1$. Mit $q = \frac{p}{p-1}$ wollen wir Lemma a geeignet anwenden und beachten zunächst die folgende grobe Abschätzung

$$|u+v|^p \le (|u|+|v|)^p \le \{2 \max\{|u|,|v|\}\}^p =$$

$$2^p \max\{|u|^p, |v|^p\} \le 2^p \{|u|^p + |v|^p\},$$

woraus $u+v \in L^p(X,\lambda)$ folgt. (Hierbei ist $\max\{f,g\}$ die Funktion $x \mapsto \max\{f(x), g(x)\}$; Repräsentantenwahl!) Daher gilt

$$\int_X |u+v|^p d\lambda = \int_X |u+v|^{p-1}|u+v|\,d\lambda \le$$

$$\int_X |u+v|^{p-1} |u| \, d\lambda + \int_X |u+v|^{p-1} |v| \, d\lambda \leq \text{(Lemma a)}$$

$$\left(\int_X |u+v|^{q(p-1)} d\lambda \right)^{1/q} \|u\|_p + \left(\int_X |u+v|^{q(p-1)} d\lambda \right)^{1/q} \|v\|_p \implies$$

$$\|u+v\|_p^p \leq \|u+v\|_p^{p/q} \left\{ \|u\|_p + \|v\|_p \right\}.$$

O.E. sei $\|u+v\|_p > 0$. Dann folgt sofort die Behauptung. $\square$

<u>Nun zur Vollständigkeit:</u> Wir beweisen dies für $L^2(X,\lambda)$, der Fall $1 \leq p < \infty$ geht genauso. Sei also $\{u_n\}$ eine Cauchy Folge in $L^2(X,\lambda)$. Es genügt der Nachweis, daß eine Teilfolge in $L^2(X,\lambda)$ konvergiert, denn eine Cauchy Folge mit konvergenter Teilfolge ist bereits selbst konvergent.

Begründung angeben?

Zu $k \in \mathbb{N}$ gibt es ein $N_k \in \mathbb{N}$ mit

$$\|u_m - u_n\|_2 \leq 2^{-k} \quad \forall n,m \geq N_k .$$

Es sei $n_k = \max\{k, N_k\}$. Da man o.E. $N_k < N_{k+1}$ annehmen kann, folgt:

$$n_k \geq k, \quad n_k < n_{k+1}.$$

Außerdem liefert die Konstruktion

$$\|u_{n_{k+1}} - u_{n_k}\|_2 \leq 2^{-k},$$

also

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|u_{n_{k+1}} - u_{n_k}\|_2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} < \infty.$$

Sei jetzt $v_k := u_{n_k}$. Wir wählen zu v_k einen Vertreter, den wir auch v_k nennen.

Sei weiter $$V_\ell := \sum_{k=1}^{\ell} |v_{k+1} - v_k| .$$

Dann ist nach dem Lemma von Fatou (An. III, Satz 25.5)

$$\int_X \lim_{\ell\to\infty} V_\ell^2 \, d\lambda \le \liminf_{\ell\to\infty} \int_X V_\ell^2 \, d\lambda = \left(\liminf_{\ell\to\infty} \|V_\ell\|_2\right)^2 \underset{\text{Lemma b}}{\le}$$

$$\left(\liminf_{\ell\to\infty} \sum_{k=1}^{\ell} \|v_{k+1} - v_k\|_2\right)^2 \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\right)^2$$

und daher $\lim_{\ell\to\infty} V_\ell^2(x)$ existiert für λ-f.a. x als reelle Zahl! Trivialerweise folgt daraus die Existenz von $\lim_{\ell\to\infty} V_\ell(x)$ λ-f.ü. Für $h > \ell$ bekommt man λ-f.ü.

$$|v_h(x) - v_\ell(x)| = \left|\sum_{k=\ell}^{h-1} (v_{k+1}(x) - v_k(x))\right| \le$$

$$\sum_{k=\ell}^{h-1} |v_{k+1}(x) - v_k(x)| \longrightarrow 0 \quad \text{bei } h, \ell \to \infty ,$$

denn $\sum_{k=1}^{\infty} |v_{k+1} - v_k|$ ist λ-f.ü. konvergent. M.a.W.: $\{v_k\}$ ist λ-f.ü. eine Cauchy Folge; sei

$$u(x) := \lim_{k\to\infty} v_k(x) \qquad (\text{meßbar!})$$

die λ-f.ü. existierende Grenzfunktion. Zu zeigen ist jetzt:

$$u \in L^2(X,\lambda), \quad \| u - v_k \|_2 \longrightarrow 0 \text{ bei } k \to \infty.$$

Dazu benutzen wir wieder das Lemma von Fatou

$$\int_X |u - v_\ell|^2 \, d\lambda = \int_X \liminf_{k\to\infty} |v_k - v_\ell|^2 \, d\lambda \leq$$

$$\liminf_{k\to\infty} \int_X |v_k - v_\ell|^2 \, d\lambda = \left(\liminf_{k\to\infty} \| v_k - v_\ell \|_2 \right)^2 \leq$$

$$\left(\liminf_{k\to\infty} \sum_{i=\ell}^{k-1} \| v_{i+1} - v_i \|_2 \right)^2 \leq \left(\sum_{i=\ell}^{\infty} \| v_{i+1} - v_i \|_2 \right)^2 \leq$$

$$\left(\sum_{i=\ell}^{\infty} 2^{-i} \right)^2 \xrightarrow[\ell \to \infty]{} 0 .$$

Die Rechnung zeigt $u - v_\ell \in L^2(X,\lambda)$, also $u \in L^2(X,\lambda)$, und $\| u - v_\ell \|_2 \to 0$ bei $\ell \to \infty$, Satz 1.1 ist bewiesen. $\square$

<u>Korollar zu Satz 1.1</u>: Sei $1 \leq p < \infty$ und $\{w_k\}$ eine in $L^p(X,\lambda)$ konvergente Folge. <u>Dann gibt es</u> [redacted] <u>eine Teilfolge</u> $\{\tilde{w}_k\}$, <u>so daß nach Wahl von Repräsentanten gilt</u>:

$$\tilde{w}_k(x) \longrightarrow w(x) \quad \text{für } \lambda\text{-f.a. } x \in X.$$

Hier ist w die Grenzfunktion aus $L^p(X,\lambda)$, d.h.

$$\| w_k - w \|_p \longrightarrow 0 .$$

Das Korollar ergibt sich unmittelbar aus der im Beweis vorgenommenen Konstruktion. Man umschreibt die Aussage kurz so:

L^p - Konvergenz, $1 \leq p < \infty$, impliziert punktweise Konvergenz
<u>einer Teilfolge</u> λ - f.ü. (für geeignete Vertreter).

("geeignet" heißt: man wählt für jedes Folgenglied und auch für die Grenzfunktion einen beliebigen Repräsentanten). Es ist im allgemeinen falsch, daß die Folge selbst punktweise f.ü. konvergiert.

<u>Bemerkung</u>: Sei $X = \mathbb{N}$ und λ das Zählmaß auf $\mathbb{N}$. Meßbare Funktionen $u : X \to \mathbb{R}$ entsprechen genau den reellen Zahlenfolgen und $u = v$ λ - f.ü. bedeutet hier $u(n) = v(n)$ für alle n, denn $\emptyset$ ist die einzige λ - Nullmenge. Statt $L^p(X, \lambda)$ schreibt man kurz ℓ^p, also

$$\ell^p = \left\{ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} : \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \right)^{1/p} < \infty \right\}.$$

Der Raum ℓ^p ist mit $\| \{a_n\} \|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \right)^{1/p}$ ein Banach Raum.

Andere Spezialfälle wie X offen in $\mathbb{R}^n$, $\lambda = \mathcal{L}^n$ Lebesgue Maß, werden uns später interessieren.

Der Raum $L^\infty(X,\lambda)$ fehlt noch in unserer Skala. Seine Definition wird durch die Äquivalenzklassenbildung etwas erschwert.

Definition: Sei (X,λ) ein Maßraum, u eine λ-f.ü. eindeutig definierte, meßbare Funktion. Man setzt

$$\operatorname*{ess\ sup}_X |u| = \inf\{ c \in \mathbb{R} : |\tilde{u}| \le c \quad \lambda\text{-f.ü. auf } X \text{ für jeden Vertreter } \tilde{u} \text{ von } u \}.$$

Diese Zahl $\in [0,\infty]$ heißt das wesentliche Supremum (essentielles Supremum) von u. Statt $\operatorname*{ess\ sup}_X |u|$ schreibt man kurz $\|u\|_\infty$.

Bemerkungen: 1) Offenbar ist $\|u\|_\infty < \infty$, wenn es einen Vertreter $\tilde{u}$ von u gibt, der außerhalb einer λ-Nullmenge beschränkt ist. Dann hat jeder Vertreter diese Eigenschaft, und $\|u\|_\infty$ ist die kleinste der vorkommenden Schranken.

2) Im Falle $X=\mathbb{R}$, $\lambda = \mathcal{L}^1$ ist etwa

$$\| \chi_{\mathbb{Q}} \|_\infty = 0 \qquad (!)$$

im Unterschied zu $\sup_{\mathbb{R}} \chi_{\mathbb{Q}} = 1$. Bei der Bildung des "gewöhnlichen Supremums" spielt jeder Funktionswert eine Rolle, bei der Berechnung von ess sup werden Werte auf Nullmengen vernachlässigt.

<u>Satz 1.2</u>: Sei (X,λ) ein Maßraum. Wir setzen

$$L^\infty(X,\lambda) = \{ u \text{ ist f.ü. eindeutig definiert und meßbar} : \|u\|_\infty < \infty \}.$$

<u>Dann ist</u> $L^\infty(X,\lambda)$ <u>mit</u> $\|\cdot\|_\infty$ <u>ein Banach Raum.</u>

Beweis: Sei $\{u_k\}$ eine Cauchy Folge in $L^\infty(X,\lambda)$ (Wir übergehen hier den trivialen Beweis der Tatsache, daß $L^\infty(X,\lambda)$ mit $\|\cdot\|_\infty$ ein normierter Raum ist.) Dann gibt es eine λ - Nullmenge $N \subset X$ (hier geht ein: abzählbare Vereinigungen von Nullmengen sind wieder von dieser Kategorie), so daß für alle $x \in X - N$ (nach Vertreterwahl!) gilt (mit $C_1 > 0$ geeignet):

$$|u_k(x)| \leq \|u_k\|_\infty \leq C_1 < \infty ,$$

$$|u_k(x) - u_\ell(x)| \leq \|u_k - u_\ell\|_\infty \longrightarrow 0 , \quad k,\ell \to \infty .$$

Insbesondere existiert

$$u(x) := \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} u_n(x), & x \in X - N \\ 0 , & x \in N \end{cases} ,$$

wobei die Definition von u auf N völlig willkürlich ist. Die Funktion u ist meßbar (Limes - punktweise - von meßbaren Funktionen ist meßbar), für $x \in X - N$ gilt:

$$|u(x) - u_k(x)| = \lim_{\ell\to\infty} |u_\ell(x) - u_k(x)| \leq \liminf_{\ell\to\infty} \|u_\ell - u_k\|_\infty .$$

Daraus folgt

$$\| u - u_k \|_\infty \leq \liminf_{\ell \to \infty} \| u_\ell - u_k \|_\infty \xrightarrow[k \to \infty]{} 0 ,$$

speziell $u - u_k \in L^\infty(X, \lambda)$, also $u \in L^\infty(X, \lambda)$, und die behauptete Konvergenz. $\square$

<u>Beobachtung</u>: 1) Seien $u_n, u \in L^\infty(X, \lambda)$ mit $\| u_n - u \|_\infty \longrightarrow 0$, $n \to \infty$.

Dann gilt für Vertreter:

$u_n \to u$ <u>gleichmäßig</u> außerhalb eine λ-Nullmenge N $[\Longrightarrow$ $u_n(x) \to u(x)$ für alle $x \in X - N.]$

Man nennt deshalb auch $\| \cdot \|_\infty$ die Norm der gleichmäßigen Konvergenz λ-fast überall.

2) Die Hölder Ungleichung liefert folgende Inklusion

$$\lambda(X) < \infty \Longrightarrow L^{\tilde{p}}(X, \lambda) \subset L^p(X, \lambda)$$

für alle $1 \leq p \leq \tilde{p} \leq \infty$,

speziell: $L^\infty(X, \lambda) \subset L^q(X, \lambda)$, $1 \leq q < \infty$.

Offenbar ist nämlich $\int_X |u|^p \, d\lambda \leq \| u \|_\infty^p \, \lambda(X)$ für $u \in L^\infty(X, \lambda)$,

also $\| u \|_p \leq \lambda(X)^{1/p} \| u \|_\infty$ $\forall \, 1 \leq p < \infty$, und

$$\int_X |u|^p \, d\lambda \overset{\text{Hölder Ungl.}}{\leq} \left(\int_X |u|^{\tilde{p}} \, d\lambda \right)^{p/\tilde{p}} \left(\int_X 1 \, d\lambda \right)^{1 - p/\tilde{p}} \Longrightarrow$$

$$\| u \|_p \leq \| u \|_{\tilde{p}} \; \lambda(X)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{\tilde{p}}} ,$$

wenn $1 \leq p \leq \tilde{p} < \infty$ und $u \in L^{\tilde{p}}(X, \lambda)$.

$\square$

Wir verlassen kurz die L^p-Räume und erinnern an folgende Begriffe.

<u>Definition:</u> Seien X und Y $\mathbb{R}$-Vektorräume, auf denen Normen fixiert sind. Sei $A: X \to Y$ eine linear<u>e</u> Abbildung. Diese heißt <u>stetig</u> (<u>oder beschränkt</u>) bzgl. der auf X, Y gegebenen Normen, falls

$$\| A \| := \sup \{ \| Ax \| : x \in X, \|x\| \leq 1 \} < \infty$$

ist.

<u>Bemerkungen:</u> 1) Die Größe $\|A\|$ heißt (sofern sie $< \infty$ ist) die Operatornorm von A (bzgl. der gewählten Normen auf X und Y). Es gilt (trivial)

$$\left\{ \begin{array}{l} \|A\| < \infty \iff A \text{ ist stetig in } 0 \iff \\ A \text{ ist Lipschitz stetig auf } X. \end{array} \right.$$

2) Bzgl. fixierter Normen auf X und Y definieren wir