$$\mathcal{L}(X,Y) = \{ A : X \to Y \text{ linear} : \|A\| < \infty \}.$$

Dann zeigt man leicht: $\mathcal{L}(X,Y)$ <u>ist mit der Operatornorm</u> $\|\cdot\|$ <u>ein normierter Raum</u>.

3) Im Fall $\dim X, \dim Y < \infty$ sind alle linearen Abbildungen $X \to Y$ automatisch stetig ganz unabhängig davon, welche Normen auf X, Y definiert worden sind. Das gilt für $\dim X = \infty$ nicht mehr! (s. später)

4) <u>Beispiel</u>: Sei (Ω, λ) ein Maßraum mit $\lambda(\Omega) < \infty$. Wir setzen

$$A : L^\infty(\Omega,\lambda) \to L^1(\Omega,\lambda), \quad A(u) = u,$$

d.h. A ist der Einbettungsoperator. Es gilt

$$\|Au\|_1 = \int_\Omega |u| \, d\lambda \le \lambda(\Omega) \|u\|_\infty ,$$

so daß $\|A\| = \lambda(\Omega)$.

5) <u>Spezialfall</u>: X = normierter Raum, $Y = \mathbb{R}$

$\mathcal{L}(X,\mathbb{R})$ ist dann der sogenannte <u>Dualraum von X</u> bestehend aus allen <u>stetigen linearen Funktionalen</u> $\varphi : X \to \mathbb{R}$.

Schreibweise: X^* statt $\mathcal{L}(X,\mathbb{R})$

<u>Beispiel</u>: (Ω,λ) = Maßraum, $\varphi : L^1(\Omega,\lambda) \ni u \mapsto \int_\Omega u \, d\lambda$ gehört zu $L^1(\Omega,\lambda)^*$. Für $\lambda(\Omega) < \infty$ liegt dieses φ in allen $L^p(\Omega,\lambda)^*$, $1 \le p \le \infty$.

<u>Satz 1.3</u> : Seien X, Y normierte Räume, Y sei ein Banach Raum.

Dann ist $\mathcal{L}(X,Y)$ vollständig.

<u>Korollar</u> : <u>Der Dualraum X^* eines jeden normierten Raums</u> X <u>ist vollständig</u>.
(<u>X selbst muss kein B-Raum sein</u> ?)

Beweis : Sei $\{A_n\}$ eine Cauchy Folge in $\mathcal{L}(X,Y)$. Dann ist für $x \in X$

$$\| A_n x - A_m x \| \leq \| A_n - A_m \| \, \| x \| ,$$

so daß $A x := \lim_{n \to \infty} A_n x$ wegen der Vollständigkeit von Y existiert. Offenbar wird hierdurch zumindest eine lineare Abbildung $A : X \to Y$ definiert. $\{A_n\}$ Cauchy Folge bedeutet $\| A_n \| \leq M < \infty$ für alle n und geeigneter Konstanten M, also

$$\| A x \| \leq \| A_n x - A x \| + \| A_n x \| \leq M \| x \| + \| A_n x - A x \|$$

$$\Longrightarrow (n \to \infty) \qquad \| A x \| \leq M \, \| x \| \Longrightarrow A \in \mathcal{L}(X,Y).$$

Zu zeigen: $\| A_n - A \| \to 0$ bei $n \to \infty$.

Sei dazu $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir wählen $x \in X$ mit $\| x \| \leq 1$. Dazu existiert m_x mit $\| A x - A_{m_x} x \| \leq \varepsilon$ (punktweise Konvergenz). Es sei ferner $M \in \mathbb{N}$ mit $\| A_n - A_m \| \leq \varepsilon$ für alle $n, m \geq M$. O.E. gelte $m_x \geq M$.

Es folgt sodann für $n \geq M$

$$\| A x - A_n x \| \leq \| A x - A_{m_x} x \| + \| A_n - A_{m_x} \| \leq 2 \varepsilon ,$$

also auch $\| A - A_n \| \leq 2 \varepsilon$ für $n \geq M$.

$\square$

Zum Abschluß dieses Abschnitts beschreiben wir die ~~Dualraume~~ zu $L^p(X,\lambda)$, man vergleiche hierzu [Federer, p 98,99], [Alt, p. 109 f].

<u>Satz 1.4</u>: Sei (X,λ) ein Maßraum, $1 \le p \le \infty$ und

$\varphi : L^p(X,\lambda) \to \mathbb{R}$ ein stetiges lineares Funktional, d.h.

$\sup\{\varphi(u) : u \in L^p(X,\lambda), \|u\|_p \le 1\} < \infty$. Es gelte weiter

(i) $1 < p < \infty$, $q := p/_{p-1}$

oder

(ii) $p = 1$, $q = \infty$, X ist abzählbar λ-meßbar, d.h. X läßt sich darstellen in der Form $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ mit λ-meßbaren Mengen A_n, $\lambda(A_n) < \infty$

oder

(iii) $p = \infty$, $q = 1$ und φ hat folgende Eigenschaft:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_n \uparrow u \quad \text{monoton } \lambda\text{-f.ü.}, \quad u_n, u \in \\ L^p(X,\lambda) \implies \varphi(u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi(u) \end{array} \right.$$

<u>Dann gilt</u>: <u>es gibt eine eindeutige Funktion</u> $v \in L^q(X,\lambda)$ <u>mit</u>

$$\varphi(u) = \int_X u\, v \, d\lambda$$

<u>für alle</u> $u \in L^p(X,\lambda)$. <u>Ferner gilt</u>:

$$\|\varphi\| = \|v\|_q .$$

23.5.96

<u>Bemerkungen:</u> **1)** Seien $1 \leq p \leq \infty$ sowie $q = p/_{p-1} = \begin{cases} \infty, & p = 1 \\ 1, & p = \infty \end{cases}$.

Ist dann $w \in L^q(X, \lambda)$, so setzt man

$$F_w : L^p(X,\lambda) \ni u \mapsto \int_X u \cdot w \, d\lambda .$$

Nach Hölder gilt $|F_w(u)| \leq \|w\|_q \, \|u\|_p$, also $F_w \in L^p(X,\lambda)^*$ mit

$$(1) \qquad \|F_w\| = \|w\|_q . \qquad \text{weiter p 29 oben!}$$

Daß in (1) „$\leq$" gilt, ist offensichtlich. Sei o.E. zunächst $q < \infty$.

Man setzt $\quad u = |w|^{q-2} w = |w|^{q-1} \frac{w}{|w|}$, wobei $\frac{w}{|w|} = 0$

auf $[w = 0]$ definiert wird. Für <u>$q = 1$</u> ist $u = \operatorname{sign} w$,

also $\in L^\infty(X,\lambda)$, und

$$F_w(u) = \int_X w \operatorname{sign} w \, d\lambda = \|w\|_1 ,$$

$$F_w(u) \leq \|u\|_\infty \, \|w\|_1 = \|w\|_1 ,$$

so daß (1) gilt.

Für <u>$1 < q < \infty$</u> gilt $\displaystyle\int_X |u|^p \, d\lambda = \int_X |w|^{p(q-1)} \, d\lambda =$

$$\int_X |w|^{p\left(\frac{p}{p-1} - 1\right)} d\lambda = \int_X |w|^q \, d\lambda < \infty, \text{ d.h. } u \in L^p(X,\lambda),$$

und

$$F_w(u) = \int_X u\, w \, d\lambda = \int_X |w|^q d\lambda = \|w\|_q^q .$$

Aus $\|u\|_p = \|w\|_q^{q/p}$ folgt (o.E. sei $\|u\|_p \neq 0$, sonst ist $w = 0$)

$$F_w\left(\frac{u}{\|u\|_p}\right) = \|w\|_q^{q - q/p} = \|w\|_q \;, \quad \text{so daß } \|F_w\| \geq \|w\|_q.$$

Übrig bleibt der Fall $\underline{\underline{q = \infty}}$: Die erzeugende Funktion w liegt jetzt im Raum $L^\infty(X, \lambda)$. Wir benutzen die Voraussetzung ii) des Satzes zur Konstruktion einer Folge Ω_n meßbarer Mengen $\subset X$ mit

$$\lambda(\Omega_n) < \infty, \; \Omega_n \subset \Omega_{n+1}, \; X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n .$$

Für $l \in \mathbb{N}$ ist $\chi_{\Omega_n} |w|^l \in L^1(X, \lambda)$ mit

$$\int_{\Omega_n} |w|^l d\lambda = \int_{\Omega_n} w \operatorname{sign} w \, |w|^{l-1} d\lambda =$$

$$\int_X w \, \chi_{\Omega_n} \operatorname{sign} w \, |w|^{l-1} d\lambda \leq \|F_w\| \int_X \chi_{\Omega_n} |w|^{l-1} d\lambda =$$

$$\|F_w\| \int_{\Omega_n} |w|^{l-1} d\lambda ,$$

woraus durch Iteration folgt: $\displaystyle\int_{\Omega_n} |w|^l d\lambda \leq \|F_w\|^l \lambda(\Omega_n) \Longrightarrow$

$$\left(\int_{\Omega_n} |w|^l d\lambda\right)^{1/l} \leq \|F_w\| \, \lambda(\Omega_n)^{1/l} \xrightarrow[l \to \infty]{} \|F_w\| .$$

Man überlegt sich leicht $\displaystyle\left(\int_{\Omega_n} |w|^l d\lambda\right)^{1/l} \xrightarrow[l \to \infty]{} \|w\|_{L^\infty(\Omega_n)}$, wo rechts die Norm im Raum $L^\infty(\Omega_n, \lambda)$ gemeint ist. Also ist

$$\| \chi_{\Omega_n} w \|_\infty \leq \| F_w \|,$$

und mit $n \to \infty$ bekommt man (1).

Wir haben somit gezeigt: die Zuordnung

$$I : L^q(X,\lambda) \ni w \mapsto F_w \in L^p(X,\lambda)^*$$

ist eine <u>lineare Isometrie</u>. Insbesondere ist I injektiv, denn $I(w)=0$ heißt $F_w = 0$ und (1) ergibt $w = 0$.

Unsere bisherigen Überlegungen liefern natürlich keinen Beweis von Satz 1.4: dort wird ausgesagt, daß I für $p < \infty$ (also $q > 1$) sogar eine surjektive Abbildung, also ein <u>isometrischer Isomorphismus</u> ist. In diesem Sinne gilt

$$L^p(X,\lambda)^* \cong L^q(X,\lambda),$$

$$1 \leq p < \infty, \quad q = p/_{p-1},$$

wobei für $p = 1$ der Raum X abzählbar λ-meßbar sein muß.

2) Im Spezialfall $p = q = 2$ ergibt sich 1.4 als Spezialfall einer Aussage über Hilbert Räume, kommt also völlig ohne Maßtheorie aus! (vgl. §2)

weglassen, weiter auf 31 unten!

3) Wir kommentieren Fall (iii) von Satz 1.4: gemäß Bem. 1) induzieren $L^1(X,\lambda)$ - Funktionen w vermöge

$$u \mapsto \int_X w\, u \, d\lambda$$

stetige lineare Funktionale auf $L^\infty(X,\lambda)$, in diesem Sinne gilt

$$L^1(X,\lambda) \subset L^\infty(X,\lambda)^*.$$

Teil (iii) des Satzes beschreibt nun die linearen Funktionale $\ell : L^\infty(X,\lambda) \longrightarrow \mathbb{R}$, die noch von einer $L^1(X,\lambda)$ - Funktion erzeugt werden: <u>ℓ muß sogar stetig sein bzgl. monotoner Konvergenz</u>, d.h. bereits aus

(2) $\qquad u_n \to u \quad$ punktweise und monoton λ - f.ü.

für $u_n, u \in L^\infty(X,\lambda)$ folgt $\ell(u_n) \to \ell(u)$. (2) impliziert i.a. nicht $u_n \to u$ in $L^\infty(X,\lambda)$ (also λ - f.ü. gleichmäßig), so daß $\ell(u_n) \to \ell(u)$ nicht aus der Stetigkeit von ℓ folgt. Es handelt sich um eine echte Zusatzbedingung.

4) (iii) ergibt einen Satz vom <u>Radon - Nikodym Typ:</u> Seien

X = metrischer Raum,

λ, μ = Borel reguläre, endliche Maße auf X

Es gelte: $\quad \lambda(E) = 0 \implies \mu(E) = 0$

Sei f λ - meßbar, also $f^{-}(I)$ λ - meßbar für Intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Da λ Borel regulär ist, gibt es eine Borel Menge $B \subset X$ mit (vgl. Ana III, Def. 23.4)

$$\lambda(f^{-}(I)) = \lambda(B), \quad B \supset f^{-}(I).$$

Es folgt $f^{-}(I) = B - N$ mit einer λ - Nullmenge N. Nach Voraussetzung ist N auch μ - Nullmenge, d.h. $f^{-}(I)$ ist μ-meßbar. Wir haben gezeigt: λ - meßbare Funktionen sind μ - meßbar, entsprechend verifiziert man: $L^\infty(X, \lambda) \subset L^\infty(X, \mu)$. Damit macht folgende Definition Sinn:

$$\ell : L^\infty(X,\lambda) \ni u \mapsto \int_X u \, d\mu .$$

ℓ gehört zu $L^\infty(X, \lambda)^*$ und erfüllt die Voraussetzung aus (iii) des Satzes: <u>es gibt also</u> $v \in L^1(X, \lambda)$ <u>mit</u>

$$\int_X u \, d\mu = \int_X u v \, d\lambda \quad \forall \, u \in L^\infty(X, \lambda).$$

<u>Das Maß</u> μ <u>hat daher die Dichte v bzgl. λ.</u>

5) Wir geben noch ein Beispiel für $L^1 \subsetneqq (L^\infty)^*$:

auf $\mathbb{R}^n$ betrachten wir das Lebesgue Maß $\mathcal{L}^n$ und setzen

$F : C_b^0(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad F(u) = u(0)$ ("Auswertungsfunktional")

Offenbar gilt $|F(u)| \leq \|u\|_\infty$. Um weiterzukommen, brauchen wir

<u>Satz</u> (<u>von Hahn-Banach</u>) Sei X ein normierter Raum und $\mathcal{U} \subset X$ ein Unterraum. $p : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ sei linear und stetig, also

$$\|p\| = \sup\{|p(x)| : x \in \mathcal{U}, \|x\| \leq 1\} < \infty.$$

Dann gibt es ein $P \in X^*$ mit $P|_{\mathcal{U}} = p$ und $\|P\| = \|p\|$.

(vgl. z.B. [Alt, p.97])

Sei T die Fortsetzung von F auf $L^\infty(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}^n)$ gemäß dem obigen Satz. Angenommen, es gibt $v \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}^n)$ mit

$$T(u) = \int_{\mathbb{R}^n} u\, v \, d\mathcal{L}^n \quad \forall\, u \in L^\infty(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}^n).$$

Es folgt

$$0 = u(0) = \int_{\mathbb{R}^n} u\, v\, d\mathcal{L}^n$$

für alle $u \in C_b^0(\mathbb{R}^n)$ mit $u(0) = 0$, speziell gilt

$$0 = \int_\Omega u\, v\, d\mathcal{L}^n$$

für jede Funktion $u \in C^0(\Omega)$ mit kompaktem Träger in Ω, wo Ω eine offene Menge ist mit $0 \notin \Omega$. In Kapitel II werden wir zeigen, daß $v = 0$ f.ü. auf Ω und damit auf $\mathbb{R}^n$ folgt, Widerspruch! $\square$

§2 Die Geometrie von Hilbert Räumen, Darstellungssätze

Wir beginnen mit einer bekannten

Definition: Ein Skalarprodukt oder inneres Produkt auf einem reellen Vektorraum H ist eine bilineare Abbildung $\langle\cdot,\cdot\rangle : H \times H \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

i) $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$ (Symmetrie)

ii) $\langle x,x\rangle > 0$ für $x \neq 0$ (positive Definitheit)

Bemerkung: ~~Aus $\langle 0,x\rangle = 0$ (wegen der Linearität von $\langle\cdot,x\rangle$) folgt sofort, daß nach ii) $\langle x,x\rangle$ immer ≥ 0 ist.~~

Lemma: Sei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt auf dem reellen Raum H. Dann gilt:

i) $|\langle x,y\rangle| \leq \sqrt{\langle x,x\rangle}\,\sqrt{\langle y,y\rangle}$ (Cauchy - Schwarz Ungl.)

ii) Mit $\|x\| := \sqrt{\langle x,x\rangle}$ ist $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

iii) $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$ (Parallelogrammgesetz)

Korollar: $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$ ist eine Norm auf H, genannt "die vom Skalarprodukt induzierte Norm"

Die Cauchy - Schwarz Ungleichung kann man ganz kurz so beweisen:

Sind $x, y \in H$ linear unabhängig, so folgt $\|y\| > 0$ und

$$\|x\|^2 + 2t\langle x,y\rangle + \|y\|^2 t^2 = \|x+ty\|^2 > 0$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Nullstellenfreiheit der linken Seite bedeutet

$$\|y\|^{-4}\langle x,y\rangle^2 - \|y\|^{-2}\|x\|^2 < 0$$

("Diskriminante < 0"), mithin $\langle x,y\rangle^2 < \|x\|^2\|y\|^2$.

Das zeigt i) mit „$<$" im linear unabhängigen Fall, daß i) für abhängige Vektoren mit „$=$" gilt, ist trivial.

Unter Verwendung von i) gilt

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x,y\rangle \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2,$$

man bekommt die Dreiecksungleichung.

Die Parallelogrammidentität (geom. Rechtfertigung im $\mathbb{R}^n$) ist klar.

$\square$

<u>Nebenbemerkung</u>: Ist $(X, |\cdot|)$ irgendein normierter Raum, so findet man i.a. Vektoren x, y, so daß iii) des Lemmas <u>nicht</u> gilt. Man kann zeigen: <u>erfüllt</u> $|\cdot|$ <u>das Parallelogrammgesetz</u>, <u>d.h.</u> <u>gilt</u>

$$|x+y|^2 + |x-y|^2 = 2(|x|^2 + |y|^2) \quad \forall_{x,y \in X},$$

<u>so wird</u> $|\cdot|$ <u>von einem Skalarprodukt</u> $\langle\, ,\,\rangle$ <u>erzeugt</u>.

Hinweis: gilt $|x| = \langle x,x\rangle^{1/2}$ für ein Skalarprodukt,

so ist offenbar

$$* \qquad \langle x,y\rangle = \tfrac{1}{4}\left(|x+y|^2 - |x-y|^2\right),$$

das Skalarprodukt wird durch die Norm beschrieben. Nach $*$ gibt es also höchstens eine Möglichkeit, aus $|\cdot|$ ein Produkt zu konstruieren, das gerade diese Norm induziert. Erfüllt $|\cdot|$ das Parallelogrammgesetz, so definiert man $\langle\cdot,\cdot\rangle$ via $*$ und rechnet die Skalarprodukteigenschaften nach.

□

Definition: Ein Hilbert Raum ist ein Skalarproduktraum, der bzgl. der induzierten Norm vollständig ist.

Beispiel: $L^2(X,\lambda)$ für einen beliebigen Maßraum (X,λ)

Man setzt hier

$$\langle f,g\rangle := \int_X f g \, d\lambda.$$

Die Vollständigkeit von $L^2(X,\lambda)$ bzgl.

$$\|f\|_2 = \langle f,f\rangle^{1/2} = \left(\int_X f^2 d\lambda\right)^{1/2}$$

haben wir bereits gesehen.

Spezialfall: $\ell^2 = L^2(\mathbb{N},\xi)$, ξ = Zählmaß

Das Skalarprodukt zweier Folgen $\{x_n\}, \{y_n\} \in \ell^2$ lautet

$$\langle \{x_n\}, \{y_n\} \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$$

Gegenbeispiel: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt; für $u, v \in C_b^0(\Omega)$

sei $$\langle u, v \rangle = \int_\Omega u\, v \, d\mathcal{L}^n$$

Dies ist ein Skalarprodukt auf $C_b^0(\Omega)$, aber $C_b^0(\Omega)$ ist nicht vollständig bzgl. $\|\cdot\|_2$.

$\square$

Sei ab jetzt $(H, \langle\,,\,\rangle)$ ein Skalarproduktraum. Wie im $\mathbb{R}^n$ definiert man:

$x, y \in H$ sind zueinander senkrecht, $x \perp y :\Longleftrightarrow \langle x, y \rangle = 0$.

Ist $M \subset H$ eine beliebige Menge (nicht notwendig Unterraum), so setzt man

$$M^\perp := \{u \in H : \langle u, x \rangle = 0 \text{ für alle } x \in M\}$$

(orthogonales Komplement)

Lemma: $M^\perp$ ist abgeschlossener Unterraum von H.

Beweis: Unterraum ✓

Abgeschlossenheit: Sei $\{u_n\}$ Folge in $M^\perp$ mit $u_n \to u$ für $u \in H$. Der Fall $M = \emptyset$ ist trivial ($\Longrightarrow M^\perp = H$), andernfalls gilt für $x \in M$

$$\langle u, x \rangle = \underbrace{\langle u_n, x \rangle}_{=0} + \langle u - u_n, x \rangle \leq$$

$$\|u_n - u\| \, \|x\| \longrightarrow 0,$$

also $\langle u, x \rangle = 0$, d.h. $u \in M^{\perp}$. $\square$

$\longrightarrow$ 30.5

Die folgende Aussage ist etwas tiefer

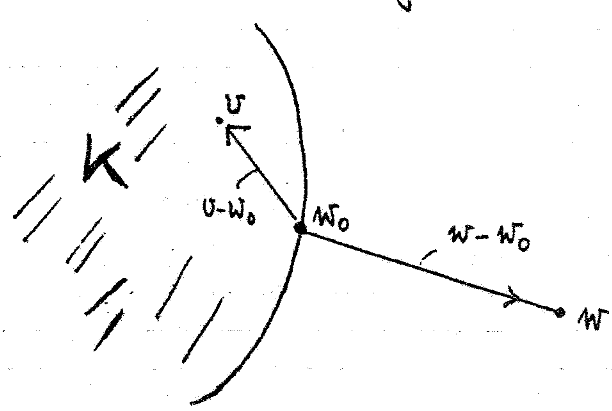
<u>Satz 2.1</u>: Sei H ein <u>Hilbert Raum</u>, $K \neq \emptyset$ sei <u>abgeschlossene</u> und <u>konvexe</u> Teilmenge von H. Zu jedem $w \in H$ gibt es ein eindeutiges Element $w_0 \in K$, das den Abstand von w zu K realisiert, d.h.

(i) $\|w - w_0\| = \operatorname{dist}(w, K) \left(:= \inf_{x \in K} \|w - x\| \right)$.

$w_0 \in K$ <u>ist die eindeutig bestimmte Lösung von</u>

$$\langle w - w_0, v - w_0 \rangle \leq 0 \quad \forall v \in K.$$

<u>Bemerkung</u>: w_0 heißt Fußpunkt des Lotes von w auf K, die Ungleichung wird deutlich an nebenstehendem Bild.



Beweis : Sei $\{v_n\} \subset K$ <u>Minimalfolge</u>, d.h.

$$\| v_n - w \| \xrightarrow[n \to \infty]{} \operatorname{dist}(w, K).$$

Wir wollen zeigen, daß $\{v_n\}$ Cauchy Folge ist. Es gilt

$$\| v_n - w \|^2 + \| v_m - w \|^2 =$$

$$\| \underbrace{\tfrac{1}{2}(v_n + v_m) - w}_{=: x} + \underbrace{\tfrac{1}{2}(v_n - v_m)}_{=: y} \|^2 + \| x - y \|^2 \overset{\text{Parallelogramm-gesetz}}{=}$$

$$2 \|x\|^2 + 2 \|y\|^2 = 2 \| \tfrac{1}{2}(v_n + v_m) - w \|^2 + 2 \, \tfrac{1}{4} \| v_n - v_m \|^2 \geq$$

$$2 \operatorname{dist}(w, K)^2 + \tfrac{1}{2} \| v_n - v_m \|^2,$$

denn wegen der Konvexität von K gilt $\tfrac{1}{2}(v_n + v_m) \in K$, mithin

$$\| \tfrac{1}{2}(v_n + v_m) - w \| \geq \operatorname{dist}(w, K).$$

Es folgt:

$$\| v_n - v_m \|^2 \leq 2 \left\{ \| v_n - w \|^2 + \| v_m - w \|^2 \right\} - 4 \operatorname{dist}(w, K)^2.$$

Nach Wahl der Folge ist $\{\dots\} \xrightarrow[n,m \to \infty]{} 2 \operatorname{dist}(w, K)^2$,

also

$$\| v_n - v_m \| \to 0 \text{ bei } n, m \to \infty.$$

Es sei

$$w_0 := \lim_{n \to \infty} v_n.$$

Da K abgeschlossen ist, gehört w_0 zu K, überdies

$$\| w_0 - w \| = \lim_{n\to\infty} \| v_n - w \| = \mathrm{dist}\,(w, K),$$

w_0 ist eine Lösung von (i).

Wir zeigen (ii) $\langle w - w_0, v - w_0 \rangle \leq 0 \quad \forall v \in K.$

Für $t \in [0,1]$ und $v \in K$ gilt (Konvexität!)

$$w_0 + t(v - w_0) \in K \implies$$

$$\mathrm{dist}\,(w, K) \leq \| w - \{ w_0 + t\,(v - w_0) \} \| \implies$$

$$\| w - w_0 \|^2 \leq \| w - \{ w_0 + t(v - w_0) \} \|^2 \implies$$

$$0 \leq t^2 \| v - w_0 \|^2 - 2t \langle w - w_0, v - w_0 \rangle .$$

Division durch t und anschließender Grenzübergang $t \downarrow 0$ ergibt (ii).

Sei $w_0' \in K$ ebenfalls Lösung von (ii). Dann hat man

$$\langle w - w_0, w_0' - w_0 \rangle \leq 0,$$

$$\langle w - w_0', w_0 - w_0' \rangle \leq 0 \iff \langle w_0' - w, w_0' - w_0 \rangle \leq 0$$

Addition ergibt $w_0 = w_0'$.

Da aber jede Minimalstelle, also jede Lösung w_0 von (i), die Ungleichung (ii) erfüllt, haben wir auch Eindeutigkeit des Minimums. $\square$

schon erledigt!

<u>Bemerkung:</u> Satz 2.1 steht in enger Beziehung zur Variationsrechnung. Dort ist H ein Hilbert Raum von Funktionen, K eine durch "gewisse

Nebenbedingungen" ausgezeichnete abgeschlossene und konvexe Teilklasse, das Variationsfunktional $F: K \to \mathbb{R}$ hat die Gestalt

$$F(u) = \|u - \tilde{v}\|, \quad \left(\text{oder: } \|u-\tilde{v}\|^2 \; ! \right)$$

wo $\tilde{v} \in H$ beliebig fixiert ist. Nach i) gibt es eine eindeutige Lösung u_0 von

$$\text{" } F \longrightarrow \min \text{ auf } K \text{ ".}$$

Ungleichung (ii) ist so etwas wie eine <u>Eulersche Ungleichung</u>, denn zur Herleitung benutzen wir

$$\frac{1}{t}\left(F(u_0 + t(v-u_0)) - F(u_0)\right) \geq 0 \qquad \text{schon erledigt}$$

für $t \in (0,1]$ und $v \in K$.

$\square$

Eine wichtige Anwendung von Satz 2.1 ist

<u>Satz 2.2</u>: (<u>Projektionssatz</u>, <u>Orthogonalzerlegung</u>)

Sei $\mathcal{U}$ abgeschlossener Unterraum des Hilbert Raums H. Dann gilt

$$H = \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}^{\perp},$$

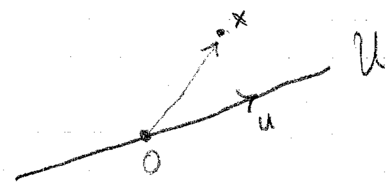
d.h. jeder Vektor $x \in H$ hat eine eindeutige Zerlegung $x = u + v$ mit $u \in \mathcal{U}$, $v \in \mathcal{U}^{\perp}$. Die orthogonale Projektion

$$P_{\mathcal{U}} : H \to \mathcal{U}, \quad x \mapsto u,$$

ist linear und stetig mit $P_{\mathcal{U}}^2 = P_{\mathcal{U}}$. Für $\mathcal{U} \neq \{0\}$ ist $\|P_{\mathcal{U}}\| = 1$.

Beweis: U ist natürlich konvex, zu $x \in H$ wählt man mit 2.1 das Abstandsminimum $u \in U$ zu x, also

$$\| u - x \| = \inf_{v \in U} \| v - x \|.$$



u erfüllt

$$\langle x-u,\ u'-u \rangle \le 0 \qquad \forall u' \in U,$$

und da U ein Unterraum ist, folgt

$$\langle x-u,\ w \rangle \le 0 \qquad \forall w \in U,$$

also sogar $= 0$. Per Definition ist dann $x - u \in U^\perp$, und man hat durch $x = u + (x-u)$ eine Zerlegung der gewünschten Art. Die Eindeutigkeit folgt aus $U \cap U^\perp = \{0\}$, die restlichen Behauptungen sind klar.

$\square$

<u>Korollar:</u> Für beliebige Unterräume U eines Hilbert Raums ist $U^{\perp\perp} = \overline{U}$.
(benutze $U^\perp = \overline{U}^\perp$ sowie $H = \overline{U} + \overline{U}^\perp$ und $H = U^\perp + (U^\perp)^\perp$, $U^\perp$ abge[illegible])

Die folgende Überlegung motiviert die sogenannte <u>Hilbertraummethode</u> zur Lösung partieller Differentialgleichungen. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, zu lösen ist

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{auf } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

Hat man eine Lösung gefunden, so folgt (Gauß)

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega f \varphi \, dx$$

für alle $\varphi \in C_0^1(\Omega)$. In Kap. II definieren wir einen Hilbert Raum H_0 der folgendes leistet:

i) $C_0^1(\Omega) \subsetneq H_0 \subsetneq L^2(\Omega, \mathcal{L}^n)$

ii) die Elemente von H_0 haben Randwerte 0

iii) für $u \in H_0$ existiert ein verallgemeinerter Gradient ∇

iv) das Skalarprodukt auf H_0 ist $\langle u, v\rangle = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx$

Also erfüllt $u \in H_0$ $\quad \langle u, \cdot \rangle = \ell$ auf H_0, wobei $\ell \in H_0^*$ gegeben ist durch $\ell(\varphi) = \int_\Omega f \cdot \varphi \, dx$. Umgekehrt kann man jetzt natürlich versuchen, auf diesem Weg eine "verallgemeinerte Lösung" $u \in H_0$ zu finden, indem man die Linearform ℓ in obiger Form mit einem geeigneten Vektor $u \in H_0$ darstellt. Der nächste Satz zeigt, daß dies in jedem Hilbert Raum H möglich ist.

<u>Satz 2.3</u>: (<u>Darstellungssatz von Riesz</u>)

Sei H ein Hilbert Raum und $\ell \in H^*$. Dann gibt es einen Vektor $u \in H$ mit $\langle u, \cdot \rangle = \ell$ auf H. Der darstellende Vektor u ist <u>eindeutig</u>, es gilt: $\|u\| = \|\ell\|$.

Die Zuordnung $H \ni u \mapsto \langle u, \cdot\rangle \in H^*$ ist ein <u>isometrischer Isomorphismus</u>.

Man nennt Hilbert Räume daher <u>selbstdual</u> und identifiziert H^* mit H.
hier steht also ein anderer Beweis von $(L^2)^* = L^2$!

<u>Beweis</u>: Sei $w \in H$ beliebig und $\phi : H \ni x \mapsto \langle x, w \rangle$. Aus der Cauchy-Schwarz Ungleichung folgt $\phi \in H^*$ mit $\|\phi\| \leq \|w\|$.
Gemäß $\phi\left(\frac{w}{\|w\|}\right) = \|w\|$ sieht man:

$$H \ni w \mapsto \langle w, \cdot \rangle \in H^*$$

ist eine isometrische Injektion (injektiv, da $\langle w, \cdot \rangle = \langle w', \cdot \rangle$ offenbar $w - w' \in H^\perp = \{0\}$ bedeutet). Zu zeigen bleibt die Surjektivität dieser Abbildung. Sei dazu $\ell \in H^* - \{0\}$. Wir setzen

$$U := \text{Kern } \ell = \{x \in H : \ell x = 0\}.$$

Da U abgeschlossen ist (Stetigkeit von ℓ), gilt die Zerlegung

$$H = U \oplus U^\perp$$

mit $\dim U^\perp = 1$: sei dazu $e \in U^\perp - \{0\}$ fixiert. Für jeden Vektor $x \in U^\perp$ gilt

$$\ell\left(x - \frac{\ell(x)}{\ell(e)} e\right) = 0 \implies x - \frac{\ell(x)}{\ell(e)} e \in U,$$

also $x - \frac{\ell(x)}{\ell(e)} e \in U \cap U^\perp$ und damit $x = \frac{\ell(x)}{\ell(e)} e$. Das zeigt:

$$U^\perp = \text{Span}\,[e]$$

$z \in H$ wird zerlegt in $z = x + y$ mit $x \in U$, $y \in U^\perp$.

Es gilt $y = \lambda e$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$, also

$$\ell(z) = \ell(y) = \lambda\, \ell(e)$$

und

$$\langle z, e \rangle = \langle y, e \rangle = \lambda \|e\|^2.$$

Zusammen folgt:

$$\ell(z) = \langle z, e \rangle \|e\|^{-2} \ell(e) = \langle z, \|e\|^{-2} \ell(e)\, e \rangle,$$

d.h. $\|e\|^{-2} \ell(e)\, e$ stellt ℓ dar.

$\square$

Wir benötigen später noch einen anderen Darstellungssatz zugeschnitten auf folgende Situation: sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, zu lösen ist

$$\begin{cases} -\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}\, \partial_\alpha \partial_\beta u = f & \text{auf } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 & , \end{cases}$$

wobei die Koeffizienten $a_{\alpha\beta}$ gegebene reelle Zahlen sind mit

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}\, \eta_\alpha \eta_\beta > 0 \quad \forall \eta \in \mathbb{R}^n - \{0\}. \quad \text{(\underline{Elliptizität})}$$

Wir verlangen __nicht__ $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$. In der Vorlesung P.D.G. I entwickeln wir eine Lösungstheorie für symmetrische Koeffizienten, die aber nun nicht mehr