greift. Sei H_0 der vorhin erwähnte Hilbert Raum mit dem Produkt

$$\langle u, v\rangle := \sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega} \partial_i u \, \partial_i v \, dx.$$

Nun setzen wir

$$B(u,v) := \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \int_{\Omega} a_{\alpha\beta}\, \partial_\alpha u \, \partial_\beta v \, dx$$

und erhalten eine nicht - symmetrische Bilinearform $B : H_0 \times H_0 \longrightarrow \mathbb{R}$.

Mit $\ell \in H_0^*$, $\ell(\varphi) := \int_{\Omega} f \varphi \, dx$, folgt: wenn es eine Lösung des Randwertproblems gibt, so erfüllt diese $B(u,\cdot) = \ell$ auf H_0.

Wir nehmen später den umgekehrten Standpunkt ein und definieren die Lösung des Darstellungsproblems

"finde $u \in H_0$ mit $B(u,\cdot) = \ell$"

als verallgemeinerte Lösung des Dirichlet Problems. Was wir also brauchen, ist ein Darstellungssatz bzgl. allgemeiner Bilinearformen auf Hilberträumen.

Definition: Sei X ein normierter Raum, $B : X \times X \to \mathbb{R}$ eine nicht notwendig symmetrische Bilinearform.

i) B heißt stetig (oder beschränkt), falls gilt:

$$\sup \{ |B(x,y)| : \|x\|, \|y\| \le 1 \} < \infty.$$

ii) B heißt koerziv, wenn $\inf \{ B(x,x) : \|x\| = 1 \} > 0$.

Bemerkungen: 1) Ist B stetig gemäß ii), so folgt die Stetigkeit von B als Abbildung $X \times X \to \mathbb{R}$, wenn man $X \times X$ durch $\|(x,y)\| := \|x\| + \|y\|$ oder eine äquivalente Norm normiert. Außerdem gilt mit $M = \sup\{|B(x,y)| : \|x\|, \|y\| \leq 1\}$ die Abschätzung

$$|B(u,v)| \leq M \, \|u\| \, \|v\| \quad \forall u,v \in X$$

2) Ist B koerziv und $m = \inf\{B(x,x) : \|x\| = 1\}$ (>0), so gilt

$$B(y,y) \geq m \, \|y\|^2 \quad \forall y \in X$$

Nun zum angekündigten Darstellungssatz.

Satz 2.4 (Satz von Lax-Milgram)

Sei B eine stetige und koerzive Bilinearform auf dem Hilbert Raum $(H, \langle \cdot,\cdot \rangle)$, die nicht notwendig symmetrisch sein muß. Dann hat jedes stetige lineare Funktional $\ell \in H^*$ eine eindeutige Darstellung

$$\ell = B(\cdot, u) \qquad (\text{oder } \ell = B(\tilde{u}, \cdot))$$

mit u (bzw $\tilde{u}$) aus H. Die Zuordnung

$$H \ni w \mapsto B(\cdot, w) \in H^*$$

$$(H \ni v \mapsto B(v, \cdot) \in H^*)$$

ist ein stetiger Isomorphismus mit stetiger Umkehrabbildung.

Bemerkung: Mit $B = \langle \cdot,\cdot \rangle$ bekommt man den Satz von Riesz als Spezialfall.

Beweis: Sei $T: H \to H$ wie folgt definiert: für $y \in H$ ist $B(\cdot, y) \in H^*$, also existiert nach Riesz genau ein Vektor $x \in H$ mit $\langle \cdot, x \rangle = B(\cdot, y)$. Diesen Vektor nennen wir Ty, also

$$\langle \cdot, Ty \rangle = B(\cdot, y).$$

Zeige: T ist bijektiv. Damit:

$$\ell \in H^* \underset{\exists x}{\overset{\text{Riesz}}{\Longrightarrow}} \ell = \langle \cdot, x \rangle \underset{T \text{ bijektiv}}{=} \langle \cdot, T\tilde{x} \rangle = B(\cdot, \tilde{x})$$

Nach Riesz ist

$$\| Ty \| = \| B(\cdot, y) \| = \sup_{x \in H, \|x\| \le 1} B(x, y) \le M \|y\|,$$

wobei M gemäß Bem. 1 vor Satz 2.4 definiert wird.

Da T ersichtlich linear ist, folgt $T \in \mathcal{L}(H, H)$ mit $\|T\| \le M$.

Wir zeigen:

i) $\operatorname{Kern} T = \{0\}$: es gilt für alle $y \in H$ (m aus Bem. 2)

$$\|y\| \, \|Ty\| \ge \langle y, Ty \rangle = B(y, y) \ge m \|y\|^2,$$

so daß $Ty = 0$ sofort $y = 0$ zur Folge hat.

Außerdem sieht man die Abschätzung

$$* \quad \|Ty\| \ge m \|y\| \quad \forall y \in H,$$

folglich ist $T^{-1}: \operatorname{Bild} T \to H$ stetig, $\|T^{-1}\| \le 1/m$.

ii) Bild T ist abgeschlossener Unterraum: dazu betrachten wir eine Folge $\{Tx_n\}$ von Bildpunkten mit $Tx_n \to z$ in H. $\{Tx_n\}$ ist

Zu zeigen: $z \in \operatorname{Bild} T$

natürlich Cauchy Folge, aus $*$ folgt dies für $\{x_n\}$, also $x_n \longrightarrow x$ für ein $x \in H$ und dann natürlich $z = Tx$, d.h. $z \in \text{Bild}\, T$.

iii) $\text{Bild}\, T = H$, was offenbar den Beweis des Satzes beendet.

Gemäß ii) ist

$$H = \text{Bild}\, T \oplus (\text{Bild}\, T)^{\perp},$$

und im Fall $\text{Bild}\, T \subsetneqq H$ gibt es einen Vektor $z \in (\text{Bild}\, T)^{\perp}$, $z \neq 0$

d.h. $\langle z, Tx \rangle = 0 \quad \forall x \in H$. Insbesondere ist

$$0 = \langle z, Tz \rangle = B(z, z) \geqslant m \, \|z\|^2 > 0,$$

Widerspruch!

$\square$

§ 3 Schwache Konvergenz

Diese neue Begriffsbildung läßt sich sehr gut motivieren, wenn man sich überlegt, wie "abstrakte Variationsprobleme" diskutiert werden können: seien

$$\begin{cases} X & \text{ein normierter Raum (von Funktionen)}, \\ K \subset X & \text{eine gegebene Teilmenge (festgelegt durch Randwerte, etc.)}, \\ F : X \to \mathbb{R} & \text{ein "Funktional"}, \end{cases}$$

wobei "Funktional" hier nicht Linearität von F meint. Es soll gelten

$$* \qquad F(u) \geq \alpha \, \|u\| + \beta \qquad (\text{"Koerzivität"})$$

mit $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$. Dann lautet das zu lösende Problem:

$$** \qquad \text{"finde } u \in K \text{ mit } F(u) = \inf_K F \text{"}$$

Gemäß $*$ ist F nach unten beschränkt, also $\inf_K F > -\infty$, und der naheliegendste Weg zur Lösung von $**$ geht so: es sei $\{u_n\} \subset K$ eine <u>Minimalfolge</u>, also $F(u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \inf_K F$. Aus $*$ folgt

$$\sup_n \|u_n\| < \infty .$$

Angenommen, man kann aus $\{u_n\}$ eine konvergente Teilfolge mit Limes u wählen. Für abgeschlossene Klassen K (in den Anwendungen immer der Fall liegt u in K und "geringe Stetigkeitseigenschaften" von F garantieren

$$F(u) \leq \liminf_{n\to\infty} F(u_n),$$

so daß u das Problem ** löst.

Zur Verfügung hat man in der Regel nur die Information, daß $\{u_n\}$ normbeschränkt ist, und für $\dim X < \infty$ reicht dies, um mit Bolzano-Weierstraß eine norm konvergente Folge zu wählen. $\dim X < \infty$ ist aber für die Anwendungen völlig uninteressant, <u>für $\dim X = \infty$ gilt Bolzano-Weierstraß nicht</u>!

<u>Beispiel:</u> In ℓ^2 betrachtet man die Einheitsvektoren

$$e_n = (0 \ldots 0 \underset{\uparrow_n}{1} 0 \ldots\ldots),$$

d.h. die Folge e_n besteht aus lauter Nullen und einer Eins an der Stelle n.

Es gilt $\|e_n\| = 1$ und für $n \neq m$ $\|e_n - e_m\| = \sqrt{2}$, so daß keine Teilfolge von $\{e_n\}$ eine Cauchy Bedingung erfüllen kann.

Andererseits gilt für $x \in \ell^2$, $x = \{x_k\}$,

$$\langle x, e_n \rangle = x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

denn $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty$. Nach dem Riesz Satz bedeutet das

$$\varphi(e_n) \longrightarrow 0 \quad \forall \varphi \in (\ell^2)^*,$$

d.h. man hat in einem "abgeschwächten Sinn" Konvergenz von $\{e_n\}$ gegen 0.

Definition: (schwache Konvergenz)

Sei X ein normierter Raum. Die Folge $\{x_n\} \subset X$ heißt *schwach konvergent* gegen $x \in X$, i.Z. $x_n \rightharpoonup x$, falls gilt:

$$\varphi(x_n) \to \varphi(x) \quad \forall\, \varphi \in X^*$$

(im Hilbert Raum: $\langle x_n, u\rangle \to \langle x, u\rangle \quad \forall u \in X$) "in L^p?"

Das Konzept der schwachen Konvergenz liefert einen für die Anwendungen ausreichenden Ersatz der Bolzano-Weierstraß Eigenschaft. Wir werden zeigen:

> X "guter" Raum, $\{x_n\}$ normbeschränkte Folge $\Longrightarrow$
>
> es gibt eine schwach konvergente Teilfolge.

Hilbert Räume sind z.B. gute Räume, aber auch $L^p(X,\lambda)$ mit $1 < p < \infty$.

Lemma: Sei X ein normierter Raum.

i) Normkonvergenz impliziert schwache Konvergenz, die Umkehrung gilt nicht.

ii) Der schwache Limes ist – wenn existent – eindeutig.

iii) Aus $x_k \rightharpoonup x$ schwach in X folgt: $\|x\| \leq \liminf_{k\to\infty} \|x_k\|$

iv) Schwach konvergente Folgen sind beschränkt.

v) Kommt die Norm auf X von einem Skalarprodukt, so gilt:

$$\left.\begin{array}{l} x_n \rightharpoonup x \text{ schwach} \\ \text{und } \|x_n\| \to \|x\| \end{array}\right\} \Longleftrightarrow x_n \to x \text{ in der Norm}$$

Beweis: i) Für $\varphi \in X^*$ ist $|\varphi(x_n) - \varphi(x)| \leq \|\varphi\| \, \|x_n - x\|$,

woraus die Behauptung folgt. Als "Gegenbeispiel" betrachte in ℓ^2 die Folge $\{e_n\}$ mit $e_n = (0 \ldots 0 \, 1 \, 0 \ldots)$

ii) hört sich trivial an, benutzt aber eine

<u>Version des Satzes von Hahn-Banach</u> ([Alt, p. 98, 4.4])

Zu $x \in X$, $x \neq 0$, gibt es $\varphi \in X^*$ mit $\|\varphi\| = 1$ und $\varphi(x) = \|x\|$.

(diese Aussage bedient sich des Lemmas von Zorn!)
[Folgerung: $\|x\| = \sup\{\psi(x) : \psi \in X^*, \|\psi\| \leq 1\}$]

Gelte nun $\varphi(x_n) \to \varphi(x)$, $\varphi(x_n) \to \varphi(x')$ $\forall \varphi \in X^*$,

d.h. x, x' sind schwache Limiten. Dann ist $\varphi(x - x') = 0$ für alle φ, der Hahn-Banach Satz liefert $x - x' = 0$.
(nach Riesz klar im Hilbert-Raum: $\langle x - x', u \rangle = 0 \; \forall u \in H \Longrightarrow x = x'$)

iii) Für $x = 0$ ist nichts zu zeigen; andernfalls wähle mit Hahn-Banach $\varphi \in X^*$, $\|\varphi\| = 1$, $\|x\| = \varphi(x)$. Es folgt aus $x_n \to x$

$$\|x\| = \varphi(x) = \lim_{n \to \infty} \varphi(x_n) \leq \liminf_{n \to \infty} \|\varphi\| \cdot \|x_n\|,$$

das ist die Behauptung.

iv) ergibt sich aus dem <u>Satz von Banach-Steinhaus</u> (s.u.).

v) "$\Leftarrow$" klar!

"$\Rightarrow$" man schreibt $\|x_n - x\|^2 = \|x_n\|^2 + \|x\|^2 - 2\langle x_n, x \rangle$ und sieht, 3.2

SATZ von Banach-Steinhaus (Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit)

Z = Banachraum, U = normierter Raum

$T_n : Z \to U$ linear und stetig, $n \in \mathbb{N}$

Zu jedem $z \in Z$ existiere ein $K(z) < \infty$ mit (punktweise Beschränktheit)

$$\sup_n \| T_n(z) \| \leq K(z)$$

Dann ist sogar $\sup_n \| T_n \| < \infty$.

Anwendung: gelte $x_n \longrightarrow x$ in X Z.z.: $\sup_n \|x_n\| < \infty$

$x_n \in X^{**}$ via $x_n(\varphi) := \varphi(x_n)$ $\forall \varphi \in X^*$

setze $T_n : X^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $T_n(\varphi) = \varphi(x_n)$

es wird vorausgesetzt: $T_n(\varphi) \xrightarrow[n \to \infty]{} \varphi(x) \in \mathbb{R}$

$$\Longrightarrow \quad \sup_n |T_n(\varphi)| \leq K(\varphi) < \infty \quad \forall \varphi \in X^*$$

$$\overset{\text{Satz}}{\Longrightarrow} \quad \sup_n \| T_n \| < \infty$$

offenbar: $\| T_n \| = \| x_n \|$ (Version von Hahn-Banach) daß die Voraussetzungen gerade das Verschwinden der rechten Seite bei $n \to \infty$ implizieren.

$\square$

<u>Bemerkung</u>: Die Beschreibung v) ist falsch in beliebigen normierten Räumen, sie läßt sich aber ausdehnen auf die sogenannten <u>uniform konvexen</u> Räume (vgl. [Yosida]).

Vor dem Satz von Banach - Steinhaus diskutieren wir noch kurz <u>schwache Konvergenz in Hilbert Räumen</u>. Die nächste Aussage ist trivial:

<u>Lemma</u>: Sei H ein Hilbert Raum, $\{x_n\}$ sei normbeschränkte Folge mit der Eigenschaft, daß $\lim\limits_{n \to \infty} \varphi(x_n)$ für alle $\varphi \in H^*$ existiert. Dann gibt es $x \in H$ mit $x_n \rightharpoonup x$.

<u>Bemerkung</u>: Die Voraussetzung, daß $\{x_n\}$ beschränkt ist, folgt bereits aus der Existenz von $\lim\limits_{n \to \infty} \varphi(x_n)$ für alle φ, denn offenbar ist dann die Folge $\{x_n\} \subset H^{**}$ punktweise beschränkt auf H^*, mit Banach - Steinhaus folgt $\sup\limits_n |\varphi(x_n)| \leq M$ für alle φ mit $\|\varphi\| \leq 1$.
Gemäß $\|x_n\| = \sup\limits_{\|\varphi\| \leq 1} \varphi(x_n)$ bekommt man $\|x_n\| \leq M$.
Diese Rechnung gilt <u>für jeden normierten Raum</u> (man kommt ohne Vollständigkeit aus, da Banach - S. auf dem stets vollständigen Dualraum benutzt wird)

Beweis des Lemmas: Für $y \in H$ gehört $\langle \cdot, y \rangle$ zu H^*, d.h.

$\varphi(y) := \lim_{n \to \infty} \langle y, x_n \rangle$ ist definiert und offenbar linear. Wegen

$$|\varphi(y)| \leq \sup_n \|x_n\| \; \|y\|$$

folgt Stetigkeit von φ. Schreibt man $\varphi = \langle \cdot, x \rangle$ mit $x \in H$, so haben wir offenbar $x_n \rightharpoonup x$, denn es gilt $\langle y, x_n \rangle \to \langle y, x \rangle$ für alle $y \in H$ und H^* besteht aus allen $\langle y, \cdot \rangle$ mit $y \in H$. $\square$

<u>Satz 3.1</u>: (<u>schwache Bolzano - Weierstraß Eigenschaft für Hilbert Räume</u>)

> Im Hilbert Raum H sind normbeschränkte Folgen schwach kompakt, d.h. aus $\sup_n \|x_n\| < \infty$ folgt die Existenz von $\{x_n'\}$ und $x \in H$ mit $x_n' \rightharpoonup x$.

Dies zeigt, daß jedenfalls für Hilbert Räume die schwache Konvergenz die zu Beginn dieses Abschnitts gewünschte Eigenschaft hat.

Beweis: Sei H separabel, d.h. es gibt eine abzählbare Menge $\{y_1, y_2, \dots\}$ von Punkten aus H, deren Normabschluß gerade H ist. $\langle x_n, y_1 \rangle$ ist beschränkte reelle Folge,

$$\alpha_1 := \lim_{n \to \infty} \langle x_n^1, y_1 \rangle$$

existiert für eine Teilfolge $\{x_n^1\} \subset \{x_n\}$. Aus $\{x_n^1\}$ wählt man

erneut eine Teilfolge $\{x_n^2\}$ für die $\alpha_2 := \lim \langle x_n^2, y_2 \rangle$ existiert usw.

Beweis des Lemmas: Für $y \in H$ gehört $\langle \cdot, y \rangle$ zu H^*, d.h.

$\varphi(y) := \lim_{n\to\infty} \langle y, x_n \rangle$ ist definiert und offenbar linear. Wegen

$$|\varphi(y)| \le \sup_n \|x_n\| \; \|y\|$$

folgt Stetigkeit von φ. Schreibt man $\varphi = \langle \cdot, x \rangle$ mit $x \in H$, so haben wir offenbar $x_n \rightharpoonup x$, denn es gilt $\langle y, x_n \rangle \to \langle y, x \rangle$ für alle $y \in H$ und H^* besteht aus allen $\langle y, \cdot \rangle$ mit $y \in H$. $\square$

<u>Satz 3.1</u>: (<u>schwache Bolzano-Weierstraß Eigenschaft für Hilbert Räume</u>)

> Im Hilbert Raum H sind normbeschränkte Folgen schwach kompakt, d.h. aus $\sup_n \|x_n\| < \infty$ folgt die Existenz von $\{x'_n\}$ und $x \in H$ mit $x'_n \rightharpoonup x$.

Dies zeigt, daß jedenfalls für Hilbert Räume die schwache Konvergenz die zu Beginn dieses Abschnitts gewünschte Eigenschaft hat.

Beweis: Sei H separabel, d.h. es gibt eine abzählbare Menge $\{y_1, y_2, \ldots\}$ von Punkten aus H, deren Normabschluß gerade H ist. $\langle x_n, y_1 \rangle$ ist beschränkte reelle Folge,

$$\alpha_1 := \lim_{n\to\infty} \langle x^1_n, y_1 \rangle$$

existiert für eine Teilfolge $\{x^1_n\} \subset \{x_n\}$. Aus $\{x^1_n\}$ wählt man erneut eine Teilfolge $\{x^2_n\}$, für die $\alpha_2 := \lim_{n\to\infty} \langle x^2_n, y_2 \rangle$ existiert, usw.

Die Diagonalfolge $\{\tilde{x}_n\} \subset \{x_n\}$ liefert Konvergenz von $\langle \tilde{x}_n, y \rangle$ für alle $y \in \{y_1, y_2, \dots\}$. Sei $M := \sup \|x_j\|$. $y \in H$ sei beliebig gegeben. Sei außerdem $\varepsilon > 0$. Man wählt y_j mit $\|y - y_j\| \leq \varepsilon$ und bekommt für alle Indices n, m $\left(\alpha_i := \lim_{n\to\infty} \langle \tilde{x}_n, y_i \rangle\right)$

$$|\langle \tilde{x}_n, y\rangle - \langle \tilde{x}_m, y\rangle| \leq |\langle \tilde{x}_n, y\rangle - \alpha_j| + |\langle \tilde{x}_m, y\rangle - \alpha_j| \leq$$

$$|\langle \tilde{x}_n, y_j\rangle - \alpha_j| + |\langle \tilde{x}_n, y - y_j\rangle| + |\langle \tilde{x}_m, y - y_j\rangle| +$$

$$|\langle \tilde{x}_m, y_j\rangle - \alpha_j| \leq$$

$$2M\varepsilon + |\langle \tilde{x}_n, y_j\rangle - \alpha_j| + |\langle \tilde{x}_m, y_j\rangle - \alpha_j|.$$

Für $n, m \gg 1$ sind die beiden letzten Terme $\leq \varepsilon$, d.h. $\{\langle \tilde{x}_n, y\rangle\}$ ist für alle $y \in H$ Cauchy Folge in $\mathbb{R}$, anders gesagt: $\lim_{n\to\infty} \varphi(\tilde{x}_n)$ existiert für alle $\varphi \in H^*$, mit dem vorigen Lemma folgt die Behauptung.

Ist H nicht separabel, so setzt man

$$U := \text{Abschluß der linearen Hülle von } \{x_1, x_2, \dots\}.$$

U ist separabler Hilbert Raum, es gibt eine Teilfolge $\{x'_n\}$ und ein $x \in U$ mit $\langle x'_n, v\rangle \to \langle x, v\rangle$ für alle $v \in U$ (schwache Kogz. in U).

$y \in H$ wird zerlegt in $y = v + z$ mit $v \in U$, $z \in U^\perp$, gemäß $\langle x'_n, z\rangle = 0 = \langle x, z\rangle$ folgt $\langle x'_n, y\rangle \longrightarrow \langle x, y\rangle$ für alle $y \in H$.

$\square$