Kapitel II Sobolev Räume

spielen in der modernen Theorie der partiellen Differentialgleichungen eine herausragende Rolle, mehrdimensionale Variationsprobleme kann man nur in diesen Raumklassen sinnvoll formulieren und lösen.

§ 1 Das Konzept der schwachen Ableitung (Distributionsableitung)

Wir rekapitulieren kurz den in I § 2 vorgeschlagenen Weg zur Lösung von

$$\begin{cases} -\Delta u = f \quad \text{auf } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

auf beschränkten Gebieten $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Gibt es eine Lösung $u \in C^2(\Omega)$, so folgt nach partieller Integration

$$B(u,\varphi) := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega f \varphi \, dx =: L(\varphi)$$

für alle $\varphi \in C_0^1(\Omega)$.

Wir wissen bereits, daß $C_0^1(\Omega)$ mit dem Skalarprodukt B nicht vollständig ist, also der Satz von Riesz in $C_0^1(\Omega)$ nicht greift. Um weiter zukommen, müssen wir $C_0^1(\Omega)$ ersetzen durch einen Hilbert Raum, dessen Skalarprodukt gerade B ist. In B werden Ableitungen nicht punktweise ausgewertet, sondern nur integriert, und dies gibt Spielraum, Klassen von Funktionen mit schwächeren Ableitungseigenschaften zu definieren.

1. Versuch: " Klassische Ableitung existiert $\mathcal{L}^n$-f.ü. "

Sei $u : \Omega \to \mathbb{R}$, Ω offen in $\mathbb{R}^n$, so beschaffen, daß die Ableitung $\nabla u(x)$ in $\mathcal{L}^n$-f.a. $x \in \Omega$ existiert; es gelte zudem $\nabla u \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$.

Haben sowohl u als auch v diese Eigenschaft, so ist

$$B(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx$$

zumindest sinnvoll definiert. Diese Begriffsbildung hat einen entscheidenden Nachteil: zwischen u und der Ableitung ∇u besteht in der Regel kein Zusammenhang mehr! Man betrachte etwa $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$u(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Es ist $u'(x) = 0$ $\mathcal{L}^1$-f.ü. (abgesehen vom Ausnahmepunkt 0), ein vernünftiger verallgemeinerter Ableitungsbegriff sollte $u \equiv \text{const}$ $\mathcal{L}^1$-f.ü. ergeben, was hier nicht der Fall ist.

2. Versuch: Differenzenquotienten

Ist $u \in C^1(\Omega)$, so konvergieren die

Differenzenquotienten $\Delta_h^i u(x) = \frac{1}{h}\left(u(x+he_i) - u(x)\right)$

bei $h \to 0$ lokal gleichmäßig gegen die entsprechende partielle Ableitung $\partial_i u$, $i = 1, \ldots, n$. Ist nur eine $L^1(\Omega)$ - Funktion u gegeben, so gehören die Differenzenquotienten zu $L^1_{loc}(\Omega)$, und man kann <u>fordern</u>: es gibt $L^1_{loc}(\Omega)$ - Funktionen $v_1, \ldots, v_n$ mit

$$* \left\{ \begin{array}{l} \Delta^i_h u \xrightarrow[h \to 0]{} v_i \quad \text{in } L^1_{loc}(\Omega), \\ i = 1, \ldots, n. \end{array} \right.$$

$L^p_{loc}(\Omega)$ = alle f.ü. definierten Funktionen u mit $u \in L^p(D)$, $D \subset\subset \Omega$

(Statt $L^1_{(loc)}(\Omega)$ läßt sich alles in $L^p_{(loc)}(\Omega)$ formulieren) Die $L^1(\Omega)$ - Funktionen u mit $*$ umfassen $C^1(\Omega)$ (genauer $C^1_b(\Omega)$), v_i entspricht einer verallgemeinerten Ableitung $\partial_i u$.

Leider ist obige Definition etwas unhandlich, wir werden aber später zeigen, daß sie das richtige leistet.

<u>3. Versuch</u>: <u>Approximation</u>

Sei u z.B. aus $L^1_{loc}(\Omega)$, i eine Koordinatenrichtung.

Es wäre sinnvoll, eine Funktion $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ als verallgemeinerte i^{te} partielle Ableitung von u anzusprechen, wenn es eine Folge $\{u_k\}$ $\subset C^1(\Omega)$ gibt mit

$$\left\{ \begin{array}{l} u_k \to u \quad \text{in } L^1_{loc}(\Omega) \\ \frac{\partial}{\partial x_i} u_k \to v \quad \text{in } L^1_{loc}(\Omega) \end{array} \right.$$

bei $k \to \infty$. Natürlich muß man sich davon überzeugen, daß diese Begriffsbildung nicht etwa von der speziellen Folge abhängt. Das werden wir später tun, wenn der 3^{te} Versuch als gleichwertig mit unserer nun folgenden endgültigen Definition erkannt wird.

Der $\longrightarrow$

4. Versuch: Konzept der Distributionsableitung

ist begrifflich am einfachsten zu verstehen und gleichzeitig – wie der Name sagt – auf viel allgemeinere Situationen anwendbar.

Wir nehmen den folgenden Satz zur Kenntnis (Beweis später!)

Satz 1.1 (Fundamentallemma der Variationsrechnung)

Sei $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, d.h. f ist eine $\mathcal{L}^n$-f.ü. eindeutig definierte Funktion $\Omega \to \mathbb{R}$ mit $\int_G |f|\, dx < \infty$ für alle $G \subset\subset \Omega$. Es gelte

$$\int_\Omega f \varphi \, dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Dann ist $f = 0$.

$\square$

Sei nun u zunächst eine C^1-Funktion. Ist v lediglich aus $L^1_{loc}(\Omega)$ mit $-\int_\Omega u \, \partial_i \varphi \, dx = \int_\Omega v \varphi \, dx \quad *$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, so folgt (partielle Integration links)

$$\int_\Omega \partial_i u \, \varphi \, dx = \int_\Omega v \, \varphi \, dx,$$

also $v = \partial_i u$ nach Satz 1.1. Die linke Seite von $*$ macht nun auch dann Sinn, wenn u gar nicht mehr differenzierbar ist, sondern nur noch in $L^1_{loc}(\Omega)$.

Man sagt: $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ hat eine schwache Ableitung in die i^{te} Koordinatenrichtung, wenn es eine Funktion $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ mit $*$ gibt. v ist eindeutig bestimmt (wenn existent!). Dies führt auf folgende

Definition: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, u, v seien aus $L^1_{loc}(\Omega)$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ bezeichne einen Multiindex. Wir schreiben

$$\partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} .$$

Man nennt v die α^{te} schwache Ableitung von u, falls gilt

$$\int_\Omega v \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \partial^\alpha \varphi \, u \, dx$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. u heißt k-mal schwach differenzierbar auf Ω, $k \geq 1$, wenn alle schwachen Ableitungen bis zur Ordnung k von u existieren.

Die Menge aller k-mal schwach differenzierbaren Funktionen heißt <u>Sobolev Raum $W^k(\Omega)$</u>.

<u>Bemerkungen:</u> 0) Per Definition ist $W^k(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$, wo L^1 natürlich bzgl. des Maßes $\mathcal{L}^n$ gebildet wird. Sobolev Funktionen sind also nach unseren Ausführungen über die L^p-Räume in I § 1 f.ü. eindeutig definierte Funktionen, man kann nur Vertreter punktweise auswerten. In jeder Klasse gibt es <u>höchstens</u> einen stetigen Vertreter (Gleichheit zweier stetiger Funktionen bis auf Nullmengen in $\Omega \Longrightarrow$ Gleichheit überall), wie wir gleich sehen werden, muß $u \in W^k(\Omega)$ keinen stetigen Vertreter haben!

1) Hat $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ eine α^{te} schwache Ableitung v, so ist diese mit Satz 1.1 wieder eindeutig, wir schreiben $\partial^\alpha u$ statt v oder $D^\alpha u$.

2) Diese Bezeichnungsweise wird durch folgende Aussage gerechtfertigt:

> $C^k(\Omega) \subset W^k(\Omega)$; für $u \in C^k(\Omega)$ existieren alle α^{ten} schwachen Ableitungen, $|\alpha| \leq k$, und stimmen mit den üblichen partiellen Ableitungen überein

Man beweist dies mit dem Satz von Gauß.

3) Wir diskutieren einige

<u>Beispiele:</u> a) Sei $u(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$. Es gilt: $u \notin W^1(-1,1)$,

d.h. es besteht Hoffnung, daß unsere jetzige Definition besser ist als Versuch 1.

Für $\varphi \in C_0^\infty(-1,1)$ ist nämlich

$$\int_{-1}^{1} u(t)\,\varphi'(t)\,dt = \int_0^1 \varphi'(t)\,dt = \varphi(1) - \varphi(0) = -\varphi(0).$$

Es gibt aber keine Funktion $v \in L^1_{loc}(-1,1)$ mit

$$* \quad \int_{-1}^{1} v\,\varphi\,dt = \varphi(0),$$

denn durch passende Wahl von φ ($= 0$ nahe 0) folgt für $\varepsilon > 0$ aus $*$

$$\int_{-1}^{-\varepsilon} v\,\varphi\,dt = 0, \quad \int_{\varepsilon}^{1} v\,\varphi\,dt = 0,$$

wobei die Testfunktionen φ ihren Träger in $(-1,-\varepsilon)$ bzw. $(\varepsilon,1)$ haben.

Satz 1.1 ergibt $v = 0$ $\mathcal{L}^1$-f.ü. auf $(-1,-\varepsilon) \cup (\varepsilon,1)$, wegen der Beliebigkeit von ε auch $v = 0$ auf $(-1,1)$, Widerspruch!

b) Wir betrachten folgende

<u>Situation</u> $\begin{cases} \Omega \subset \mathbb{R}^n \text{ offen}, \; x_0 \in \Omega, \; u \text{ sei aus } C^1(\Omega - \{x_0\}), \\ \text{es gelte für ein } i \quad u, \partial_i u \in L^1_{loc}(\Omega) \end{cases}$

Hier sind u und $\partial_i u$ über x_0 hinweg integrierbar, was nicht aus

$u \in C^1(\Omega - \{x_0\})$ folgt.

Angenommen, u ist auf Ω schwach differenzierbar nach x_i, d.h. es gibt $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ mit

$$(1) \qquad \int_\Omega u \, \partial_i \varphi \, dx = - \int_\Omega v \, \varphi \, dx \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Betrachtet man Teilgebiete G von Ω mit $x_0 \notin G$ und benutzt $u \in C^1(G)$, so liefert (1): $v = \partial_i u$ auf G, also $v = \partial_i u$ auf Ω

M.a.W.: die klassische Ableitung $\partial_i u$ ist der einzige Kandidat für die schwache Ableitung von u nach x_i !

Aus unseren Voraussetzungen folgt nun aber keineswegs, daß (1) mit $v = \partial_i u$ gilt, man braucht Zusatzbedingungen. Um diese zu finden, fixiert man $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ sowie $\varepsilon > 0$. Es ist

$$\int_\Omega \partial_i u \, \varphi \, dx = \int_{\Omega - \overline{B}_\varepsilon(x_0)} \partial_i u \, \varphi \, dx + \int_{B_\varepsilon(x_0)} \partial_i u \, \varphi \, dx$$

$$= (1)_\varepsilon + (2)_\varepsilon \, ,$$

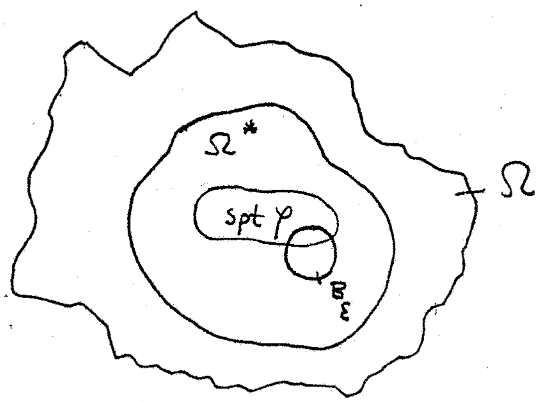
$$|(2)_\varepsilon| \leq \|\varphi\|_\infty \int_{B_\varepsilon(x_0)} |\partial_i u| \, dx \xrightarrow[\varepsilon \downarrow 0]{} 0 \quad \text{gemäß } \partial_i u \in L^1_{loc}(\Omega)$$

Das 1^{te} Integral kann man mit dem Satz von Gauß umformen:

$$(1)_\varepsilon = \int_{\Omega'} \partial_i u \, \varphi \, dx \quad ,$$

wobei $\Omega' := \Omega^* - \overline{B}_\varepsilon(x_0)$ mit einem glatten Gebiet Ω^*, das sowohl $\operatorname{spt} \varphi$ als auch $\overline{B}_\varepsilon(x_0)$ umfaßt.

Auf Ω' ist der Gauß Satz formal anwendbar $\Longrightarrow$



$$(1)_\varepsilon = \int_{\Omega'} \partial_i(u\varphi)\,dx - \int_{\Omega'} u\,\partial_i\varphi\,dx$$

$$= \int_{\partial\Omega'} \mathcal{N}^i u\,\varphi\,d\mathcal{H}^{n-1} - \int_{\Omega'} u\,\partial_i\varphi\,dx,$$

wobei $\mathcal{N}$ die äußere 1 Normale an $\partial\Omega'$ ist. Es ist $\partial\Omega' = \partial\Omega^* \cup \partial B_\varepsilon(x_0)$, der Anteil über $\partial\Omega^*$ ist 0, also

$$(1)_\varepsilon = \int_{\partial B_\varepsilon(x_0)} e_i \cdot \frac{x_0 - x}{\varepsilon} \; u(x)\,\varphi(x)\,d\mathcal{H}^{n-1}(x)$$

$$- \int_{\Omega - \overline{B}_\varepsilon(x_0)} u\,\partial_i\varphi\,dx .$$

Wie vorhin ist

$$\int_{\Omega - \overline{B}_\varepsilon(x_0)} u\,\partial_i\varphi\,dx = \int_\Omega u\,\partial_i\varphi\,dx - \int_{\overline{B}_\varepsilon(x_0)} u\,\partial_i\varphi\,dx$$

und $\displaystyle\int_{\overline{B}_\varepsilon(x_0)} u\,\partial_i\varphi\,dx \xrightarrow[\varepsilon\downarrow 0]{} 0$ gemäß $u \in L^1_{loc}(\Omega)$.

Es folgt:

$\partial_i u$ ist genau dann auch die schwache i^{te} Ableitung von u auf Ω, wenn

$$* \quad \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{|x-x_0|=\varepsilon} u(x)\varphi(x)\frac{1}{\varepsilon}\, e_i \cdot (x_0-x)\, d\mathcal{H}^{n-1}(x) = 0$$

gilt, und zwar für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Konkret sei $u(x) = |x|^{-\alpha}$ für $x \in \Omega$ mit einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, die 0 enthält. Das Integral in $*$ läßt sich abschätzen durch

$$\int_{|x|=\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon}\, |x|^{-\alpha}\, \|\varphi\|_\infty\, |x|\, d\mathcal{H}^{n-1}(x) =$$

$$\|\varphi\|_\infty\, \varepsilon^{-\alpha}\, \mathcal{H}^{n-1}(\partial B_\varepsilon(0)) = \text{const}\ \varepsilon^{n-1-\alpha},$$

d.h. $*$ gilt, falls $\alpha < n-1$. Man sieht:

für $n = 3$ ist z.B. $u(x) = \frac{1}{|x|}$ aus $W^1(\mathbb{R}^n)$, was $C^1 \subsetneqq W^1$ bestätigt. Es gibt schwach differenzierbare Funktionen, die nicht von C^1 Funktionen erzeugt werden, bzw. die keinen C^1 Vertreter besitzen.

<u>Wird der Exponent α zu groß</u>, bzw. differenziert man bei festem $\alpha > 0$ zu oft (was auf dasselbe hinausläuft!), so sind irgendwann die ent-

stehenden Funktionen nicht mehr über 0 hinweg integrierbar.

Eine genaue Diskussion zeigt:

Satz 1.2 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $0 \in \Omega$. $x \mapsto |x|^{-\alpha}$ liegt in $W^k(\Omega)$ genau dann, wenn $k + \alpha < n$ ist.

$\square$

Nachzutragen ist der

Beweis von Satz 1.1: Sei also $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ mit

$$(1) \qquad \int_\Omega f \varphi \, dx = 0 \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

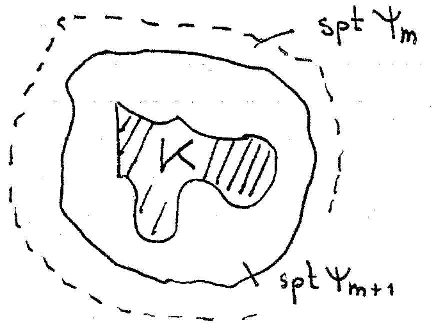
Ist $\psi \in C_0^0(\Omega)$, so findet man durch Glätten (s. später) eine Folge $\{\psi_m\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ mit

$$\|\psi_m - \psi\|_\infty \longrightarrow 0 \, , \; m \to \infty,$$

deshalb gilt (1) für alle $\varphi \in C_0^0(\Omega)$.

Sei jetzt $K \subset \Omega$ kompakt. Man wählt $\psi_m \in C_0^0(\Omega)$ mit

$$\begin{cases} 0 \le \psi_m \le 1 \, , \; \psi_m = 1 \text{ auf } K \, , \\ \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} \operatorname{spt} \psi_m \subset\subset \Omega, \; \psi_m \downarrow \chi_K \text{ punktweise.} \end{cases}$$



Konkret:

$$\Psi_m(x) = 1 - m \min\{\mathrm{dist}(x,K), 1/m\}.$$

Mit dem Satz von Lebesgue über majorisierte Konvergenz folgt

$$\int_\Omega f\,\Psi_m\,dx \longrightarrow \int_\Omega \chi_K f\,dx$$

(beachte hier: f ist zwar nur aus L^1_{loc}, aber spt $\Psi_m \subset$ uniforme kompakte Teilmenge von Ω).

Es gilt somit $\int_K f\,dx = 0 \quad \forall K \subset\subset \Omega$

Angenommen, f ist nicht $\mathcal{L}^n$-f.ü. gleich 0. Man wählt einen Vertreter f und hat $\mathcal{L}^n(A^+) > 0$ oder $\mathcal{L}^n(A^-) > 0$, wo $A^{\pm} = \{x \in \Omega : f(x) \gtrless 0\}$. Sei etwa $\mathcal{L}^n(A^+) > 0$. Da $\mathcal{L}^n$ ein Radon Maß ist, kann man die meßbare Menge A^+ von innen durch Kompakta dem Maße nach approximieren, d.h. (vgl. Ana III, Zusatz zu 23.5)

$$\mathcal{L}^n(A^+) = \sup\{\mathcal{L}^n(K) : K \text{ kompakt}, K \subset A^+\}.$$

Speziell gibt es ein Kompaktum $K \subset A^+$ mit $\mathcal{L}^n(K) > 0$.

Aus $\int_K f\,dx = 0$ und $f > 0$ $\mathcal{L}^n$-f.ü. auf K folgt natürlich ein Widerspruch. Die Annahme war falsch, jeder Vertreter von f ist $\mathcal{L}^n$-f.ü. gleich 0, also $f = 0$.

$\square$

Mit ähnlichen Argumenten bekommt man

<u>Satz 1.3</u>: Für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $1 \leq p < \infty$ ist $C_0^\infty(\Omega)$ dicht in $L^p(\Omega)$, d.h. zu $u \in L^p(\Omega)$ gibt es eine Folge $v_m \in C_0^\infty(\Omega)$ mit $\|u - v_m\|_p \to 0$.

<u>Bemerkung</u>: <u>Für $p = \infty$ ist das falsch</u>! (Sonst hätte jede Funktion aus $L^\infty(\Omega)$ einen stetigen Vertreter.)

Beweisskizze von 1.3: Sei $f \in L^p(\Omega)$. Durch Zerlegen von f in f^+ und f^- kann man o.E. $f \geq 0$ annehmen.

1.) zu $f \geq 0$ gibt es (vgl. Ana III, Satz 24.6) eine Folge $\mathcal{L}^n$-meßbarer Funktionen f_k wie folgt

$$\begin{cases} f_k \text{ ist einfach}, \; f_k \overset{\text{f.ü.}}{\leq} f_{k+1}, \; f_k \geq 0, \; f_k \leq f, \\ f_k \to f \text{ punktweise f.ü.} \end{cases}$$

Der Satz über monotone Konvergenz ergibt $\|f_k - f\|_p \to 0$.

Daher reicht es, $f \geq 0$ als einfach anzunehmen, f hat also die Form

$$f = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \chi_{A_k},$$

$\alpha_k \geq 0$, A_k meßbar $\subset \Omega$ und bis auf Nullmengen disjunkt.

Man kann die Situation weiter reduzieren: läßt sich χ_A für meßbare A mit $\mathcal{L}^n(A) < \infty$ glatt in L^p approximieren, so ist alles gezeigt.

2.) Sei $f = \chi_A$ mit A wie oben. Dazu wählt man wie vorhin kompakte Mengen $K_m \subset A$ mit $\chi_{K_m} \uparrow \chi_A$. Es folgt $\| \chi_{K_m} - \chi_A \|_p \to 0$.

3) Sei schließlich $f = \chi_K$ mit K kompakt. Die Konstruktion aus dem Beweis von 1.1 liefert $\Psi_m \in C^0_0(\Omega)$ mit $\| \Psi_m - \chi_K \|_p \to 0$. Die Ψ_m lassen sich gleichmäßig - und damit in L^p - durch Elemente von C^∞_0 approximieren.

$\square$

Wie eingangs vermerkt ist unser neuer Ableitungsbegriff Spezialfall eines viel allgemeineren Konzepts, das in der Theorie der Distributionen eine Rolle spielt.

$\longrightarrow$

<u>Definition</u>: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige offene Menge. Eine <u>Distribution</u> auf Ω ist eine Abbildung $T: C_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

i) T ist <u>linear</u>

ii) T ist <u>stetig in folgendem Sinn</u>: zu jedem Kompaktum $K \subset \Omega$ gibt es eine natürliche Zahl $N = N(K) \in \mathbb{N}_0$ und eine Konstante $C_1 = C_1(K)$ mit

$$|T(\varphi)| \leq C_1 \sum_{|\alpha| \leq N} \max_K |\partial^\alpha \varphi|$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\operatorname{spt} \varphi \subset K$.

ii) besagt, daß sich $T\varphi$ auf einem fixierten Kompaktum K universell (also unabhängig vom speziellen φ) durch eine gewisse Zahl von Ableitungen nach oben abschätzen läßt. Man nennt die kleinste Zahl $N(K)$ die Ordnung von T auf K. Die Ordnung wächst i.a. mit K.

$e_1 = (1, 0 \dots 0)$

<u>Beispiel</u>: $$T(\varphi) = \sum_{m=0}^\infty \frac{\partial^m}{\partial x_1^m} \varphi\,(m e_1), \quad \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Je größer $\operatorname{spt} \varphi$ wird, um so mehr Ableitungen müssen berücksichtigt werden.

Wichtige Spezialfälle sind die

Distributionen der Ordnung 0

a) Ist $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, so setzt man

$$T : C_0^\infty(\Omega) \ni \varphi \mapsto \int_\Omega u\varphi\,dx$$

und hat für $K \subset\subset \Omega$, $\operatorname{spt}\varphi \subset K$

$$|T\varphi| \leq \|u\|_{L^1(K)} \cdot \max_K |\varphi|,$$

also $N(K) = 0$. Man schreibt T_u für diese von u erzeugte Distribution, nach dem Fundamentallemma ist die Zuordnung $u \mapsto T_u$ injektiv. Eine Distribution heißt regulär, falls sie die Form T_u hat mit $u \in L^1_{loc}(\Omega)$.

b) Sei λ ein Radon Maß auf Ω. Für $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ folgt

$$\left| \int_\Omega \varphi\,d\lambda \right| \leq \max|\varphi| \cdot \lambda(\operatorname{spt}\varphi) < \infty,$$

d.h. $T : \varphi \mapsto \int_\Omega \varphi\,d\lambda$ definiert ebenfalls eine Distribution der Ordnung 0.

Tiefer ist folgende Umkehrung:

> Ist für eine Distribution T die Ordnung $N(K)$ stets 0 unabhängig von $K \subset\subset \Omega$, so gibt es Radon Maße $\lambda, \bar{\lambda}$ auf Ω mit $T(\varphi) = \int_\Omega \varphi\,d\lambda - \int_\Omega \varphi\,d\bar{\lambda}$.

Definition: Sei T eine Distribution auf Ω, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ ein Multindex.

Die Ableitung $\partial^\alpha T$ ist die Distribution

$$\partial^\alpha T(\varphi) := (-1)^{|\alpha|}\, T(\partial^\alpha \varphi),\ \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

In diesem Sinn sind Distributionen beliebig oft differenzierbar: das Ableiten von T geschieht durch Überwälzen der Ableitung auf die Testfunktion (mit entsprechendem Vorzeichen).

Es gilt:

$u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $v = \alpha^{te}$ schwache Ableitung von $u \Longrightarrow$

$$\partial^\alpha T_u = T_v$$

und

$$W^k(\Omega) = \{ u \in L^1_{loc}(\Omega) : \partial^\alpha T_u \text{ ist regulär für } |\alpha| \le k \}.$$

Wir haben uns früher überlegt, daß

$$u(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

nicht zu $W^1(-1,1)$ gehört. Es gilt nach damaliger Rechnung

$$\frac{d}{dt} T_u = \delta_0 \quad (\text{Dirac Maß in } 0),$$

die 1^{te} Distributionsableitung ist ein Maß, das nicht von einer L^1_{loc}-

Funktion erzeugt wird.

Ist $F = (F_1, \dots, F_n)$ ein Vektorfeld mit Komponenten $F_i \in L^1_{loc}(\Omega)$, so kann man F eine Distributionsdivergenz zuordnen durch

$$\operatorname{Div} F := \sum_{i=1}^{n} \partial_i T_{F_i} \quad , \text{ d.h.}$$

$$\operatorname{Div} F(\varphi) = -\int_\Omega F \cdot \nabla \varphi \, dx \quad , \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Wir wählen $F = \nabla u = (\partial_1 u, \dots, \partial_n u)$ mit $u \in W^1(\Omega)$. Dann gilt

$$\operatorname{Div}(\nabla u) = \Delta T_u \quad ,$$

wobei rechts der distributionelle Laplace Operator steht.

Notation: Sind S, T Distributionen auf Ω, so bedeutet

$$\text{"} \Delta T = S \text{"}$$

auf Ω, daß $T(\Delta \varphi) = S(\varphi) \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt.

Man nennt $u \in W^1(\Omega)$ schwache Lösung von $\Delta u = S$, falls

$$\Delta T_u = S \quad \Longleftrightarrow$$

$$\operatorname{Div} \nabla u = S \quad \Longleftrightarrow$$

$$-\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = S(\varphi) \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

gilt.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $0 \in \Omega$ und $n \geq 3$. Wir setzen

$$u(x) = -\frac{1}{n}\frac{1}{n-2}\mathcal{L}^n(B_1)\,|x|^{2-n}, \quad x \neq 0,$$

und wissen $\quad \Delta u = 0 \quad$ auf $\mathbb{R}^n - \{0\}$. Gemäß $u \in W^1(\Omega)$ können wir fragen: welche Distribution ist

$$\Delta T_u = \operatorname{Div}(\nabla u)$$

auf Ω? Um eine reguläre Distribution T_f, $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, kann es sich nicht handeln. Sei $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Es gilt

$$\Delta T_u(\varphi) = \int_\Omega u(x)\,\Delta\varphi(x)\,dx \underset{\uparrow \text{ PDG I, p. 52 "Fundamentalformel"}}{=}$$

$$\varphi(0) + \int_{\partial\Omega} \partial_\nu \varphi(z)\, u(z)\, d\mathcal{H}^{n-1}(z) - \int_{\partial\Omega} \varphi(z)\,\partial_\nu u(z)\, d\mathcal{H}^{n-1}(z),$$

wobei man hier natürlich o.E. annehmen darf, daß Ω die Voraussetzungen des Gauß Satzes erfüllt, sonst wähle man ein Gauß Gebiet $\Omega' \subset\subset \Omega$, das $\operatorname{spt}\varphi$ umfaßt. Die beiden Randintegrale sind 0, es folgt

$$\Delta T_u(\varphi) = \varphi(0),$$

m. a. W.: <u>im Distributionssinn</u> <u>gilt auf Ω</u> <u>die Beziehung</u>

$$\Delta u = \delta_0$$

Für $n = 2$ bekommt man mit $u(x) = -\frac{1}{2\pi} \ln 1/|x|$ dasselbe Ergebnis.

Die bisherigen Überlegungen zeigen, daß das Konzept der distributionellen Ableitung genau richtig ist, wenn man partielle Differentialgleichungen vom Typ

$$\Delta u = \delta_0 \quad (\text{Potential einer Punktladung in } 0)$$

lösen will. Das geht nicht mehr in klassischen Funktionenräumen! Immerhin sind unsere Lösungen nicht völlig allgemeine Distributionen, sie werden noch von W^1 - Funktionen erzeugt. $\square$

Wir geben zum Abschluß verschiedene äquivalente Beschreibungen von schwacher Differenzierbarkeit.

Satz 1.4: Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Dann sind gleichwertig

i) u hat auf Ω eine schwache α^{te} Ableitung $\partial^\alpha u \in L^1_{loc}(\Omega)$.

ii) für jede offene Teilmenge $V \subset \Omega$ hat $u|_V$ auf V eine schwache α^{te} Ableitung
(es besteht dann der Zusammenhang $\partial^\alpha(u|_V) = (\partial^\alpha u)|_V$ auf V)

iii) für jede kompakte Ausschöpfung von Ω durch offene Mengen Ω_m, d.h. $\overline{\Omega}_m \subset \Omega_{m+1} \subset\subset \Omega$, $\bigcup_{m=1}^\infty \Omega_m = \Omega$, hat $u|_{\Omega_m}$

für alle m eine α^{te} schwache Ableitung auf Ω_m.

iv) u hat lokal auf Ω eine α^{te} schwache Ableitung, d.h. jeder Punkt $x \in \Omega$ hat eine Umgebung V derart, daß $\partial^\alpha (u|_V)$ existiert.

<u>Bemerkung</u>: Die entscheidende Information ist iv) $\Longrightarrow$ i)

Beweis: i) $\Rightarrow$ ii), i) $\Rightarrow$ iii), i) $\Longrightarrow$ iv)

trivial! man wertet die definierende Integralrelation nur auf φ mit Träger in kleineren offen Mengen aus

ii) $\Rightarrow$ iii) : ergibt sich durch Spezialisierung

Wir zeigen noch: iii) $\Rightarrow$ i), iv) $\Longrightarrow$ i), dann sind alle Äquivalenzen bewiesen.

iii) $\Rightarrow$ i) Man fixiert irgendeine kompakte Ausschöpfung von Ω, etwa

$$\Omega_m = B_m(0) \cap \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \tfrac{1}{m}\}.$$

Nach Voraussetzung gibt es $v_m \in L^1_{loc}(\Omega_m)$ mit

$$\int_{\Omega_m} u \, \partial^\alpha \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega_m} v_m \, u \, dx$$

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega_m).$$

Auf Ω_m folgt notwendig (Fundamentallemma!) $v_m = v_{m+1}$,

also auch $v_\ell = v_k$ auf Ω_ℓ für alle $k \geq \ell$.

Sei dann $v(x) := v_m(x)$ für $x \in \Omega$, wobei m irgendein Index ist mit $x \in \Omega_m$. v gehört zu $L^1_{loc}(\Omega)$. Ist $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, so wählt man m mit $\operatorname{spt}\varphi \subset \Omega_m$, also

$$\int_\Omega u\, \partial^\alpha \varphi\, dx = \int_{\Omega_m} u\, \partial^\alpha \varphi\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega_m} v_m \varphi\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v \varphi\, dx.$$

vi) $\Longrightarrow$ i) benutzt das "Lemma von der Zerlegung der 1". Man schreibt zunächst $\Omega = \bigcup_{m=1}^\infty V_m$ mit offenen Teilmengen V_m, auf denen u eine α^{te} schwache Ableitung hat. (Jeder Punkt $x \in \Omega$ besitzt eine offene Umgebung $V(x) \subset \Omega$ mit dieser Eigenschaft, also $\Omega = \bigcup_{x \in \Omega} V(x)$, und rechts kommt man mit abzählbar vielen Mengen aus.)

Zu dieser Überdeckung wählt man eine Zerlegung der 1: es gibt $\{\phi_k\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ mit

a) $0 \leq \phi_k \leq 1$ b) zu jedem k gibt es n_k mit $\operatorname{spt}\phi_k \subset V_{n_k}$

c) für jede kompakte Menge $K \subset \Omega$ gilt

$$\#\{k : \operatorname{spt}\phi_k \cap K \neq \emptyset\} < \infty$$

d) $\sum_{k=1}^\infty \phi_k(x) = 1 \quad \forall x \in \Omega$ (hier sind immer nur endlich viele Summanden $\neq 0$)