Sei jetzt $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Dann ist

$$\int_\Omega u\, \partial^\alpha \varphi\, dx = \int_\Omega u\, \partial^\alpha \Big(\sum_{k=1}^\infty \phi_k \varphi \Big)\, dx =$$

$$\sum_{k=1}^\infty \int_\Omega u\, \partial^\alpha (\phi_k \varphi)\, dx,$$

wobei nur über die k gezählt werden muß, für die $\operatorname{spt}\phi_k \cap \operatorname{spt}\varphi \neq \emptyset$.

Nach b) ist $\operatorname{spt}(\phi_k \varphi) \subset V_{n_k}$, es gibt $v_k \in L^1_{loc}(V_{n_k})$ mit

$$\int_\Omega u\, \partial^\alpha(\phi_k \varphi)\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v_{n_k} \phi_k \varphi\, dx,$$

also

$$\int_\Omega u\, \partial^\alpha \varphi\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \varphi \Big\{ \sum_{k=1}^\infty v_{n_k} \phi_k \Big\}\, dx.$$

Offenbar gehört $v := \sum_{k=1}^\infty v_{n_k} \phi_k$ zu $L^1_{loc}(\Omega)$, die schwache α^{te} Ableitung von u existiert auf Ω und wird erzeugt von v.

$\longrightarrow$ Beginn 14 00 s.t. $\square$

Satz 1.5: (Äquivalenz der verschiedenen schwachen Ableitungsbegriffe, Teil I)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $1 \leq i \leq n$, u, v seien aus $L^1_{loc}(\Omega)$. Dann sind gleichwertig:

i) v ist die schwache Ableitung $\partial^i u$ auf Ω.

ii) Es gibt eine Folge $\{u_k\}$ in $C^\infty(\Omega)$ mit

$$u_k \to u, \quad \partial_i u_k \to v \quad \text{in } L^1_{loc}(\Omega) \text{ bei } k \to \infty$$

iii) Die Differenzenquotienten $\Delta_i^h u(x) = \frac{1}{h}(u(x+he_i) - u(x))$

Konvergieren bei $h \to 0$ in $L^1_{loc}(\Omega)$ gegen v.

<u>Bemerkung</u>: 1) u ist also genau dann in $W^1(\Omega)$, wenn eine der folgenden Bedingungen gilt:

a) es gibt eine Folge $\{u_k\}$ in $C^\infty(\Omega)$, so daß $u_k \longrightarrow u$ in $L^1_{loc}(\Omega)$ und gleichzeitig auch die Folgen $\{\partial_i u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $i=1,\dots,n$, in $L^1_{loc}(\Omega)$ Konvergent sind.

b) alle Differenzenquotienten $\Delta_i^h u$, $i=1,\dots,n$, sind L^1_{loc} - Konvergent.

2) Entsprechende Aussagen gelten für schwache Ableitungen jeder Ordnung.

Beweis: Wir zeigen nur, daß beide Bedingungen ii) und iii) hinreichend sind für i), die Umkehrung i) $\Rightarrow$ ii) beispielsweise wird sich später aus viel allgemeineren Sätzen (Konstruktion glatter Approximationen) ergeben.

ii) $\Rightarrow$ i) Für $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ ist nach Gauß

$$\int_\Omega u_k \, \partial_i \varphi \, dx = - \int_\Omega \partial_i u_k \, \varphi \, dx,$$

nun gehe man über zur Grenze $k \to \infty$ und beachte, daß nur über $\operatorname{spt} \varphi$ integriert werden muß, also L^1_{loc} - Konvergenz reicht.

iii) $\Rightarrow$ i) Sei $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, für $|h|$ genügend klein hat

$\varphi \Delta_h^i u$ kompakten Träger in Ω, und es gilt

$$\int_\Omega \varphi \Delta_h^i u \, dx = \int_\Omega \varphi(x) \frac{1}{h} [u(x+he_i) - u(x)] \, dx =$$

$$\frac{1}{h} \int_\Omega \varphi(x) u(x+he_i) \, dx - \frac{1}{h} \int_\Omega u(x) \varphi(x) \, dx \overset{\text{Transf. im 1ten Integral}}{=}$$

$$\frac{1}{h} \int_\Omega \varphi(x-he_i) u(x) \, dx - \frac{1}{h} \int_\Omega u(x) \varphi(x) \, dx =$$

$$- \int_\Omega u(x) \Delta_{-h}^i \varphi(x) \, dx,$$

d.h. wir haben eine

<u>partielle Integrationsformel für Differenzenquotienten</u>

$$\int_\Omega \varphi \Delta_h^i u \, dx = - \int_\Omega \Delta_{-h}^i \varphi \, u \, dx,$$

die natürlich wesentlich benutzt, daß φ kompakten Träger hat. Nach Voraussetzung gilt $\Delta_h^i u \longrightarrow v$ in $L^1_{loc}(\Omega)$ bei $h \to 0$, da φ glatt ist, weiß man $\Delta_{-h}^i \varphi \to \partial_i \varphi$ gleichmäßig in Ω, also

$$\int_\Omega \varphi \, v \, dx = - \int_\Omega \partial_i \varphi \, u \, dx,$$

was zu zeigen war. $\square$

Einschub: Die Funktionenklasse $AC(I)$, Sobolev Funktionen auf Intervallen

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Wenn nicht anders gesagt, sei mit $u : I \to \mathbb{R}$ nachfolgend stets eine punktweise definierte Funktion gemeint.

Definition: u heißt absolut stetig auf I (von der Klasse $AC(I)$), wenn u unbestimmtes Integral einer L^1_{loc} - Funktion v ist, d.h. mit $a \in I$ und $c \in \mathbb{R}$ gilt:

$$u(x) = \int_a^x v(t)\,dt + c, \quad x \in I.$$

Hier ist $\int_a^x v(t)\,dt$ zu verstehen als Lebesgue Integral $\int_{[a,x]} v \, d\mathcal{L}^1$.

Für diese Definition und auch die Beweise der folgenden Aussagen verweisen wir ausdrücklich auf [Hewitt & Stromberg, Real and abstract analysis, p. 282 f.].

Es gilt: $u \in AC(I) \Longrightarrow$

i) u ist stetig (offensichtlich!)

ii) die Ableitung $u'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(u(x+h) - u(x)\right)$ existiert in $\mathcal{L}^1$ - f.a. Punkten $x \in I$ und $u' = v$ f.ü.

Natürlich gibt es viele stetige Funktionen $u : I \to \mathbb{R}$, die außerhalb einer

$\mathcal{L}^1$ - Nullmenge differenzierbar sind, aber die f.ü. Differenzierbarkeit alleine reicht nicht, um einen sinnvollen Zusammenhang zwischen u und u' herzustellen.

<u>Beispiel 1</u> : $u : (-1,1) \ni x \mapsto \begin{cases} 0, & x = 0 \\ x^b \sin 1/x, & x \neq 0 \end{cases}$ mit $1 < b < 2$

Diese Funktion ist sogar an jeder Stelle differenzierbar, aber $u' \notin L^1_{loc}$, so daß sich u nicht als Integral der Ableitung rekonstruieren läßt. (Beachte: $u'(0) = 0$; $x \neq 0 \Rightarrow u'(x) = b\, x^{b-1} \sin 1/x - x^{b-2} \cos 1/x$)

<u>Beispiel 2</u>: (vgl. [Hewitt-S.], p. 278, für weitere Information)

Lebesgue konstruierte eine Funktion $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ wie folgt:

a) u ist <u>stetig</u> und monoton wachsend

<u>Übung</u>!

b) Bild $u = [0,1]$

c) die Ableitung u' existiert und ist 0 $\mathcal{L}^1$ - f.ü.

(Bemerkung: <u>es gilt allgemein, daß monotone Funktionen $\mathcal{L}^1$ - f.ü. eine Ableitung haben</u>, hier kommt es darauf an, daß die Ableitung 0 ist!)

Wer Interesse für die Einzelheiten hat, kann diese bei [HS], p. 113, nachlesen, man muß allerdings etwas Zeit mitbringen, da auch "Cantor Mengen" eine Rolle spielen.

Auch ohne das Beispiel 2 explizit zu kennen, sollte klar sein, daß sich u nicht aus u' reproduzieren läßt.

Das ist genau die entscheidende Eigenschaft der Klasse $AC(I)$!

<u>Satz:</u> Folgende Aussagen sind äquivalent für $u : I \to \mathbb{R}$

(1) $u \in AC(I)$

(2) u ist stetig und zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit: $A \subset I$, $\mathcal{L}^1(A) < \delta \implies \mathcal{L}^1(u(A)) < \varepsilon$.

(3) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$\sum_{i=1}^{n} |u(t_i) - u(s_i)| < \varepsilon,$$

wenn $s_1 \le t_1 \le s_2 \le t_2 \le \ldots \le s_n \le t_n$ mit

$$\sum_{i=1}^{n} |s_i - t_i| < \delta.$$

(4) es gibt eine Folge $\{u_n\} \subset C^1(I)$ mit $u_n \longrightarrow u$ lokal gleichmäßig auf I und der Eigenschaft, daß $\{u_n'\}$ in $L^1_{loc}(I)$ konvergiert.

Daraus folgt z.B. leicht

$u \in AC(I) \implies u$ ist von lokal beschränkter Variation

(, und kann somit als Differenz monotoner Funktionen geschrieben werden.)

Teil (4) zusammen mit Satz 1.5 ii) $\Rightarrow$ i) liefert zudem

$$AC(I) \subset W^1(I),$$

d.h. <u>$u \in AC(I)$ ist schwach</u> differenzierbar und die schwache Ableitung <u>wird von der punktweisen Ableitung u' erzeugt.</u>

Wie steht es mit der Umkehrung? Hat jede Klasse $u \in W^1(I)$ einen (und damit genau einen) $AC(I)$-Vertreter? Die Antwort ist "ja".

Sei $u \in W^1(I)$ und $\{u_k\} \subset C^1(I)$ gemäß Satz 1.5 eine Folge mit $u_k \to u$, $u_k' \to u'$ (= schwache Ableitung!) in L^1_{loc}. Wir wählen jetzt Vertreter und können nach Übergang zu Teilfolgen auch

$$u_k \to u \quad \text{punktweise } \mathcal{L}^1\text{-f.ü.}$$

erreichen. Offenbar ist

$$u_k(x_2) = u_k(x_1) + \int_{x_1}^{x_2} u_k' \, dt .$$

Sei $a \in I$ so, daß $\lim\limits_{k\to\infty} u_k(a) =: c$ existiert.

Dann folgt für $\mathcal{L}^1$-f.a. x

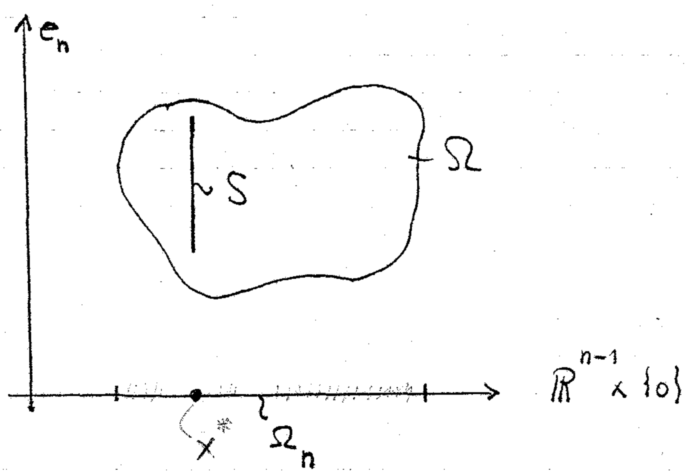
$$u(x) = c + \int_a^x u' \, dt .$$

Sei $v : I \to \mathbb{R}$, $v(z) := c + \int_a^z u' \, dt$. v ist $AC(I)$ und offenbar f.ü. gleich u, also haben wir einen $AC(I)$-Vertreter gefunden.

Satz: Sei I offenes Intervall in $\mathbb{R}$. Dann gilt $AC(I) = W^1(I)$ in dem Sinne, daß jede $W^1(I)$ - Funktion genau einen Vertreter aus $AC(I)$ hat.

Wir benötigen folgende

Notation: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u : \Omega \to \mathbb{R}$ punktweise erklärt.



Ω_n sei die Projektion von Ω auf $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$.

Ist $x^* \in \Omega_n$, so heißt die Menge

$$S = \{ x^* + t e_n : t \in I \} \quad \left(S(x^*, I) \right)$$

ein Segment in n^{ter} Richtung in Ω, wenn das offene Intervall I so gewählt wird, daß $\bar{S} \subset \Omega$ gilt.

u hat auf fast allen Segmenten in n^{ter} Richtung eine Eigenschaft, wenn diese Eigenschaft auf allen Segmenten $S(x^*, I) \subset \Omega$ erfüllt ist bis auf eine $\mathcal{L}^{n-1}$ - Nullmenge von "Fußpunkten" $x^* \in \Omega_n$.

Z.B. ist u auf f.a. Segmenten in n^{ter} Richtung absolut stetig, wenn die Einschränkung $u|_{S(x^*, I)}$ bis auf eine $\mathcal{L}^{n-1}$-Nullmenge von $x^* \in \Omega_n$ aus $AC(I)$ ist. (Man meint hier natürlich: $I \ni t \mapsto u(x^*, t)$ ist aus $AC(I)$.)

Entsprechend definiert man Segmente in jede andere Koordinatenrichtung $e_1, \dots, e_n$ und benutzt die Sprechweise "auf fast allen Segmenten in i^{ter} Richtung".

<u>Satz 1.6:</u> (<u>Äquivalenz der verschiedenen schwachen Ableitungsbegriffe, Teil II</u>)

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$ und $i \in \{1, \dots, n\}$.

Dann sind gleichwertig:

i) v ist die i^{te} schwache Ableitung von u

ii) u hat einen Vertreter u^*, der auf fast allen Segmenten in i^{ter} Richtung AC ist mit $\underbrace{\partial_i u^*}_{= \text{klass. part. Ableitung}} = v$.

(genauer: $\partial_i u^*$ erzeugt v!)

<u>Bemerkung:</u> Man bekommt insbesondere

$u \in W^1(\Omega) \iff \exists$ ein Vertreter u^*, der auf fast allen Segmenten in jeder Koordinatenrichtung AC ist

Beweis: Wir zeigen nur ii) $\Rightarrow$ i), die andere Richtung findet man bei [Morrey, Lemma 3.1.1], p. 66.

Sei o.E. $i = n$ und u^* der ausgezeichnete Vertreter. Wir wählen einen Quader

$$Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \subset \Omega$$

und schreiben $x = (x^*, x_n)$, $x \in \Omega$. Die Voraussetzung liefert:

$u^*(x^*, \cdot)$ ist für $\mathcal{L}^{n-1}$-f.a. $x^* \in Q^* = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_{n-1}, b_{n-1}]$ absolut stetig. Sei $\varphi \in C_0^\infty(Q)$. Dann ist mit $v := \partial_n u^*$

$$\int_Q v \varphi \, dx = \int_{Q^*} \left(\int_{a_n}^{b_n} \partial_n u^*(x^*, x_n) \; \varphi(x^*, x_n) \, dx_n \right) dx^* .$$

Für $\alpha, \beta \in AC(I)$ mit kompaktem Träger im Intervall I gilt

$$- \int_I \alpha' \beta \, dt = \int_I \alpha \beta' \, dt, \qquad (\text{part. Integrations-formel})$$

wie man durch Approximation von α, β durch $C^1(I)$-Funktionen beweist.

Also gilt für $\mathcal{L}^{n-1}$-f.a. x^*

$$\int_{a_n}^{b_n} \partial_n u^*(x^*, x_n) \; \varphi(x^*, x_n) \, dx_n =$$

$$- \int_{a_n}^{b_n} u^*(x^*, x_n) \; \partial_n \varphi(x^*, x_n) \, dx_n ,$$

Einsetzen ergibt $\int_Q v \varphi \, dx = - \int_Q u^* \partial_n \varphi \, dx = - \int_Q u \, \partial_n \varphi \, dx$, mithin ist u auf $\mathring{Q}$ schwach differenzierbar in Richtung x_n mit $\partial_n u = v$. Jeder Punkt $x \in \Omega$ ist innerer Punkt eines genügend kleinen Quaders $Q \subset \Omega$, die in Satz 1.4 iv) vorgenommene lokale Beschreibung der schwachen Differenzierbarkeit ergibt die Behauptung. $\square$

<u>Bemerkung</u>: Ist $u \in W^1(\Omega)$ mit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $n \geq 2$, so ist es <u>nicht</u> richtig, daß ein geeigneter Vertreter $\mathcal{L}^n$-f.ü. klassisch differenzierbar ist; (*) eine solche Aussage trifft nur im „Ausnahmefall" $n = 1$ zu! Für $n \geq 2$ findet man lediglich einen Vertreter u^*, den man f.ü. in jede Richtung partiell differenzieren kann und der sich aus seinen partiellen Ableitungen via Hauptsatz rekonstruieren läßt. Dies zeigt insbesondere, wie unser 1ter Definitionsversuch der schwachen Ableitung (p.69) zu retten gewesen wäre.

(*) (oder wenn die schwachen Ableitungen $\partial_1 u, \dots, \partial_n u$ $\in L^p_{loc}(\Omega)$ sind für ein $p > n$.)