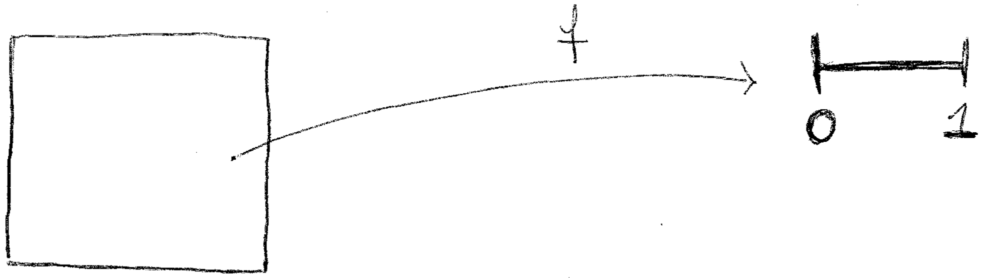
Funktionenräume

ein Beispiel:



Ω = Rechteck in $\mathbb{R}^2$.

Durch $f : \Omega \longrightarrow [0,1]$ wird ein <u>beobachtetes</u> schwarz-weiß Bild beschrieben, dessen Qualität <u>schlecht</u> ist.

Interpretation: f ist die sogenannte <u>Grauwertverteilung</u>, d. h.

$f(x) = 0$: der Punkt $x \in \Omega$ ist weiß

$f(x) = 1$: — " — schwarz

$f(x) \in (0,1)$: der Punkt $x \in \Omega$ hat einen gewissen Grauton

Die Werte $f(x)$ werden gemessen (gesehen), die Qualität des Bildes sei aber schlecht etwa durch Beschädigung, gestörte Daten, etc.

Motivation für die Bildbearbeitung: ersetze die "Beobachtung f" durch ein "besseres Bild $u : \Omega \to [0,1]$". (Rekonstruktion des Originals)

Modell: betrachte für Funktionen w das

Funktional

$$\boxed{J[w] = \underbrace{\int_\Omega (w-f)^2 \, dx}_{\text{quadr. Abweichung von der Beobachtung}} + \alpha \underbrace{\int_\Omega |\nabla w|^2 \, dx}_{\text{regularisierender Anteil mit Parameter } \alpha > 0}}$$

Experiment und Theorie $\Bigg\} \Longrightarrow$ $\boxed{\text{das } J\text{-Minimum } u \text{ ist geeignet zur Bildverbesserung}}$

∞ - dimensionale Extremwertaufgabe:

Suche unter allen Funktionen $w : \Omega \to \mathbb{R}$ ein u mit $J[u] \leq J[w]$

Problem: Wie findet man u?

Zunächst: Wo ist J überhaupt definiert?

Vorschlag: $\boxed{C^1(\overline{\Omega})}$

Offenbar: $J[w] \geq 0 \Longrightarrow \inf J$ wohldefiniert in $\mathbb{R}$; wähle eine $\boxed{\text{Minimalfolge}}$ $\{u_n\}$,

d.h. per Definition

$$\boxed{J[u_n] \to \inf J \quad \text{bei } n \to \infty}$$

Informationen, die man bekommt:

$$\circledast \qquad \sup_n \left[\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx + \int_\Omega u_n^2 \, dx \right] < \infty$$

Mehr ist über das Verhalten der Minimalfolge nicht zu gewinnen!

Die beiden Folgen $\{u_n\}$, $\{\nabla u_n\}$ sind gemäß $\circledast$ in einem gewissen Sinne beschränkt, genauer:

$$\boxed{L^2\text{- beschränkt}}$$

Es gibt aber kein

Auswahlprinzip von Bolzano-Weierstraß,

d.h.:

(*) reicht **nicht** aus, um aus $\{u_n\}$ eine Teilfolge auszuwählen, die gegen ein Element $u \in C^1(\overline{\Omega})$ konvergiert

Ein solcher Limes wäre natürlich ein hervorragender Kandidat für eine Minimalstelle.

Die beschriebene Problematik betrifft nicht nur unser Beispiel, sie ist typisch für jedes Variationsproblem.

Ausweg (in 3 Schritten):

1. schwäche den Begriff der Funktion soweit ab, dass $J[w]$ gerade noch Sinn ergibt

$\rightsquigarrow$ $\boxed{\text{Distributionsableitung}}$ (Sobolevräume)

② Versehe diese Funktionenmenge $\supsetneqq C^1(\overline{\Omega})$ mit einer passenden Topologie, so dass ⊛ ausreicht, um auf die Konvergenz einer Teilfolge zu schließen.

<u>Der Grenzwert u ist apriori zunächst nicht C^1</u>

③ zeige nachträglich (<u>Regularitätstheorie</u>):
Es bewahrheitet sich die philosophische Sicht, dass Minima ein besseres Verhalten zeigen müssen als allgemeine Vertreter, d.h.: u aus ② gehört tatsächlich zu $C^1(\overline{\Omega})$.

Gegenstände der Vorlesung:

|| <u>Mischung aus ① und ② zusammen mit etwas handgemachter Funktionalanalysis</u>

Zu ③ kommen wir nicht !

Einführung in die Theorie der Funktionenräume

M. Fuchs

Inhalt

§ 2 Die Sobolev Räume $W^{k,p}(\Omega)$ und ihre funktionalanalytischen Eigenschaften (Vollständigkeit, Reflexivität)

§ 3 Glättungsoperatoren, Approximationssätze für Sobolev Funktion
($\|J_\varepsilon \cdot\| \leq \|\cdot\|$, $J_\varepsilon u \to u$ "lokal", globale Approximation: $H = W$; $W^{1,p} \hookrightarrow L^p$ kompakt ; Poincaré)

§ 4 Das Rechnen mit Sobolev Funktionen
(Rechenregeln ; Verhalten von Differenzenquotienten ; Anhang : $W^{1,\infty} = \mathrm{Lip}$)

§ 5 Differenzierbarkeitseigenschaften schwacher Lösungen

§ 6 Einbettungssätze für Sobolev Räume

Einführung in die Theorie der Funktionenräume

M. Fuchs SS 1996 (Saarbrücken)

Diese Vorlesung ist als Begleitveranstaltung zu den Kursen über Partielle Differentialgleichungen und Variationsrechnung geplant. Kapitel I gibt eine kurze Einführung in die Funktionalanalysis, in Kapitel II beschreiben wir die sogenannten Sobolevräume.

Literaturempfehlung: H. W. Alt, Lineare Funktionalanalysis, Springer
Adams, Sobolev Spaces, A.P.

Kapitel I Banach- und Hilberträume

In diesem Kapitel setzen wir Vertrautheit mit den Definitionen metrischer und normierter Räume voraus. Dazu gehört der Konvergenzbegriff für Folgen in metrischen Räumen, außerdem die grundlegenden topologischen Konzepte

offen, abgeschlossen, kompakt, ...

für Teilmengen metrischer Räume. Informationen finden sich in meiner Vorlesung Analysis II, § 16.

§ 1 Wiederholung einiger Begriffe, die L^p-Räume von Lebesgue

Sei X ein $\mathbb{R}$ - Vektorraum mit einer Norm $\|\cdot\|$. Man sagt

$$\left\{ \begin{array}{l} X \text{ ist } \underline{\text{vollständig}} \text{ bzgl. } \|\cdot\| \quad \text{oder} \\ \text{das Paar } (X, \|\cdot\|) \text{ ist ein } \underline{\text{Banach Raum}}, \end{array} \right.$$

wenn jede Cauchy Folge bzgl. $\|\cdot\|$ konvergent ist. Das heißt: aus

$$\|x_n - x_m\| \longrightarrow 0 \text{ bei } n, m \to \infty$$

folgt die Existenz von $x \in X$ mit $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, d.h. $\|x - x_n\| \longrightarrow 0$.

Bemerkungen: 1) Es gelte $\dim X < \infty$. Dann weiß man:

i) alle Normen sind zueinander äquivalent (vgl. An. II, Satz 16.7)

ii) X versehen mit irgendeiner Norm ist stets vollständig.

2) Für $\dim X = \infty$ sind verschiedene Normen i.a. nicht äquivalent

Beispiel: Sei $X = C^0([0,1])$ der Raum aller stetigen Funktionen $[0,1] \to \mathbb{R}$. Man zeige:

a) $\|f\|_\infty = \sup\limits_{[0,1]} |f| = \max\limits_{[0,1]} |f|$,

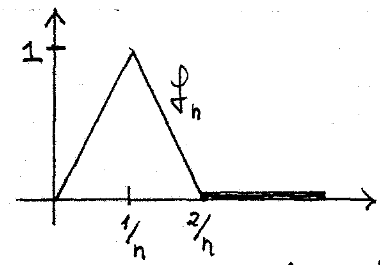
$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,dx$$

sind Normen auf X.

b) $(X, \|\cdot\|_\infty)$ ist vollständig

{ erzeuge aus der gleichmäßigen Cauchy Folge zunächst einen punktweisen Limes f; gehe dann in $|f_n(x) - f_m(x)| \le \varepsilon$ $\forall x$ $\forall n, m \ge n_\varepsilon$ zur Grenze $m \to \infty$ über $\Longrightarrow \|f_n - f\|_\infty \to 0$

Nun betrachtet man die Funktionenfolge $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$:



Offenbar $\|f_n\|_\infty = 1$,

$\|f_n\|_1 = 1/n$.

Also gibt es keine Konstante c mit $\|\cdot\|_\infty \le c \cdot \|\cdot\|_1$. Noch schlimmer: $\{f_n\}$ konvergiert bzgl. $\|\cdot\|_1$ gegen die Nullfunktion $0 \in X$, ist also insbesondere Cauchy Folge bzgl. $\|\cdot\|_1$ (beachte: Konvergenz impliziert stets die Cauchy Eigenschaft).

Gleichzeitig ist $\{f_n\}$ keine Cauchy Folge bzgl. $\|\cdot\|_\infty$: andernfalls findet man wegen der Vollständigkeit von $(X, \|\cdot\|_\infty)$ eine Funktion $f \in X$ mit $\|f_n - f\|_\infty \to 0$. Trivialerweise gilt $\|\cdot\|_1 \le \|\cdot\|_\infty$, so daß auch $\|f_n - f\|_1 \to 0$, mithin $f = 0$, und wir bekommen den Widerspruch $1 = \|f_n\|_\infty \to 0$.

$\square$

Wir geben noch einige Beispiele:

a) Räume beschränkter Funktionen

Sei E irgendeine Menge $\neq \emptyset$ (also nicht notwendig enthalten in einem metrischen oder normierten Raum), $(Y, \|\cdot\|)$ bezeichne einen normierten Raum,

wir setzen $$\underset{\text{"beschränkt"}}{\mathcal{B}}(E, Y) = \{f : E \to Y : \|f\|_\infty := \sup_{e \in E} \|f(e)\| < \infty\}$$

(bei der Def. ist natürlich $\|f\|_\infty < \infty$ zu fordern, denn nicht jede Funktion $E \to Y$ ist beschränkt).

Es gilt: i) $\mathcal{B}(E, Y)$ wird durch $\|\cdot\|_\infty$ normiert. (klar?)

ii) Y vollständig bzgl. $\|\cdot\|$ $\Longrightarrow$ $\mathcal{B}(E, Y)$ vollständig bzgl. $\|\cdot\|_\infty$.

(Beweis: $\{f_n\}$ Cauchy Folge aus $\mathcal{B}(E,Y)$ bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ $\Longrightarrow$

$\|f_n(e) - f_m(e)\| \leq \sup_E \|f_n - f_m\|$ für alle $e \in E$, d.h.

$\{f_n(e)\}$ ist Cauchy Folge in $(Y, \|\cdot\|)$ und damit konvergent gegen einen Grenzpunkt, den wir $f(e)$ nennen. Also bekommen wir eine Grenzfunktion $f : E \to Y$. Gehört diese zu $\mathcal{B}(E, Y)$?

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben; dazu wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $\|f_n - f_m\|_\infty \leq \varepsilon$ $\forall n, m \geq N$.

Sei $e \in E$, $n \geq N$ $\Longrightarrow$

$\|f(e) - f_n(e)\| \leq \|f_n(e) - f_m(e)\| + \|f_m(e) - f(e)\| \leq 2\varepsilon$,

wenn man $m \geq N$ in Abhängigkeit von e so wählt, daß $\|f_m(e) - f(e)\| \leq \varepsilon$ wird; es folgt: $\|f - f_n\|_\infty \leq 2\varepsilon$ $\forall n \geq N$, speziell $f \in \mathcal{B}(E, Y)$ und $f_n \to f$ in $\|\cdot\|_\infty$.

iii) $\|\cdot\|_\infty$ ist offenbar die Norm der gleichmäßigen Konvergenz.

b) Räume stetiger Funktionen

Sei E jetzt Teilmenge des normierten Raums X, Y sei Banachraum, wir setzen

$$C_b^0(E,Y) := \{ f \in \mathcal{B}(E,Y) : f \text{ ist stetig} \}.$$

$C_b^0(E,Y)$ besteht also genau aus den stetigen und beschränkten Funktionen.

Betrachten wir auf $C_b^0(E,Y)$ die Norm von $\mathcal{B}(E,Y)$ (also $\|\cdot\|_\infty$), so sieht man:

> $C_b^0(E,Y)$ ist abgeschlossener Unterraum von $\mathcal{B}(E,Y)$ und somit selbst ein Banach Raum (Prinzip: Z vollständig, $U \subset Z$ abgeschlossen Unterraum $\Longrightarrow U$ vollständig)

Wir zeigen die Banachraum eigenschaft von $C_b^0(E,Y)$.

Beweis: Sei $\{f_n\}$ Folge in $C_b^0(E,Y)$ mit $\|f_n - f_m\|_\infty \longrightarrow 0$, $n,m \to \infty$.

Dann gibt es (nach a) ii)) eine Grenzfunktion $f \in \mathcal{B}(E,Y)$. Zu zeigen ist deren Stetigkeit. Diese folgt aus dem Prinzip „glm. Limiten stetiger Funktionen sind stetig".

Details: Dazu sei $x_0 \in E$. Zu $\varepsilon > 0$ wähle man $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\| f - f_N \|_\infty \le \varepsilon .$$

Da $f_N : E \to Y$ in x_0 stetig ist, findet man $\delta > 0$ mit

$$\| f_N(x) - f_N(x_0) \| \le \varepsilon \quad \forall\, x \in E,\ \|x - x_0\| \le \delta,$$

d.h. für diese x

$$\begin{aligned} \| f(x) - f(x_0) \| &\le \| f(x) - f_N(x) \| + \| f_N(x) - f_N(x_0) \| \\ &\quad + \| f_N(x_0) - f(x_0) \| \\ &\le 2 \| f_N - f \|_\infty + \| f_N(x) - f_N(x_0) \| \le 3\varepsilon, \end{aligned}$$

mithin ist f stetig in x_0 und somit auf E.

<u>Bemerkungen:</u> 1) E muß nicht Teilmenge eines normierten Raumes sein, für E kann man einen metrischen oder topologischen Raum nehmen, denn man muß ja nur wissen, was Stetigkeit von $f: E \to Y$ bedeutet.

2) Per Definition ist $C^0(E, Y)$ der lineare Raum aller stetigen Funktionen. von E nach Y

Für allgemeine Mengen E (z.B. $E = (0,1)$) ist

$$C_b^0(E, Y) \subsetneq C^0(E, Y),$$

denn Stetigkeit impliziert nicht die Beschränktheit. Für <u>kompakte Mengen E</u> ist aber $\quad C_b^0(E, Y) = C^0(E, Y)$.

3) <u>Spezialfall:</u> Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Dann ist für $f \in C^0(\overline{\Omega}) = C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ die Größe $\|f\|_\infty = \sup_\Omega |f|$ stets $< \infty$, also $\quad C^0(\overline{\Omega})$ <u>mit</u> $\|\cdot\|_\infty$ <u>ein Banachraum.</u>

Als Übung zeige man die Einzelheiten der nachfolgenden Überlegung: K_m bezeichne eine Folge kompakter Mengen $\subset \Omega$ mit $\quad K_m \subset K_{m+1} \quad$ und

$$\Omega = \bigcup_{m=1}^{\infty} K_m .$$

Für $f, g \in C^0(\Omega)$ (nur stetig auf Ω !) setzt man

$$d(f, g) = \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m} \frac{\sup_{K_m} |f-g|}{1 + \sup_{K_m} |f-g|} .$$

$(C^0(\Omega), d)$ ist ein vollständiger metrischer Raum.

4) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $k \in \mathbb{N}$. Man setzt in Verallgemeinerung unserer Konzepte

$$C^k(\overline{\Omega}) := \{u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R} \mid \partial^\alpha u \text{ ist stetig auf } \overline{\Omega}, \ |\alpha| \leq k\}$$

$$C^k_b(\Omega) := \{v : \Omega \to \mathbb{R} \mid \partial^\alpha v \text{ stetig und beschränkt auf } \Omega, \ |\alpha| \leq k\}$$

sowie

$$\|u\|_{C^k} := \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha u\|_\infty \ ;$$

wobei $\|\partial^\alpha u\|_\infty := \sup\limits_\Omega |\partial^\alpha u| \quad \left(= \sup\limits_{\overline{\Omega}} |\partial^\alpha u|, \text{ falls } u \in C^k(\overline{\Omega})\right)$

Dann sind $C^k(\overline{\Omega})$ und $C^k_b(\Omega)$ unter dieser Norm Banachräume.

$\square$

Zur Definition der L^p-Räume von Lebesgue müssen wir etwas weiter ausholen, für die Notationen aus der Maßtheorie verweisen wir auf Analysis III, § 23.

Sei X eine beliebige Menge, λ ein Maß auf X (in den Anwendungen häufig $X = \Omega$ für eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\lambda = \mathcal{L}^n$ Lebesgue Maß). Wir betrachten λ-meßbare Funktionen $f : X \to \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$, d.h. $f^{-1}(I)$ ist λ-meßbar für alle Intervalle $I \subset \overline{\mathbb{R}}$. Wir nennen zwei solche Funktionen f, g gleich λ-f.ü. (fast überall), wenn $\lambda(\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}) = 0$ ist.

<u>Beispiel:</u> $\chi_{\mathbb{Q}}$ ist $\mathcal{L}^1$-f.ü. gleich der Nullfunktion.

Wir definieren vorläufig

$$\tilde{L}^1 := \{ f : X \to \overline{\overline{\mathbb{R}}} : f \ \lambda\text{-meßbar}, \int_X |f| \, d\lambda < \infty \}$$

Aus $\int_X |f| \, d\lambda < \infty$ folgt $|f(x)| < \infty$ λ-f.ü., d.h. eine λ-integrierbare Funktion hat f.ü. nur reelle Werte. Auf $\tilde{L}^1$ betrachten wir die "Norm"

$$\| f \|_1 = \int_X |f| \, d\lambda .$$

$\tilde{L}^1$ hat also keine V.R. Struktur!

<u>1^{tes} Problem</u>: sind f, g aus $\tilde{L}^1$, $c \in \mathbb{R}$, so ergibt sich bei der punktweisen Definition von $f + g$, $c f$ eventuell auf einer λ-Nullmenge ein undefinierter Ausdruck wie etwa $\infty - \infty$. Offenbar rührt dies daher, daß wir Funktionen mit Werten in $\overline{\mathbb{R}}$ zulassen. Deshalb sei ab jetzt

$$\tilde{L}^1 := \{ f : X \to \underline{\underline{\mathbb{R}}} \mid f \ \lambda\text{-meßbar}, \int_X |f| \, d\lambda < \infty \}$$

$\Longrightarrow$ $\tilde{L}^1$ ist ein linearer Raum unter den punktweisen Operationen (Rechenregeln für meßbare Funktionen!)

es gilt:

$$\int_X |c f| \, d\lambda = |c| \int_X |f| \, d\lambda, \text{ d.h. } \| c f \|_1 = |c| \, \| f \|_1$$

und

$$\int_X |f+g| \, d\lambda \le \int_X |f| \, d\lambda + \int_X |g| \, d\lambda, \quad \text{d.h. } \| f+g \|_1 \le \| f \|_1 + \| g \|_1$$

Jetzt hat man aber ein

<u>2tes Problem</u> : $\|\cdot\|_1$ ist nicht definit, d.h. aus $\|f\|_1 = 0$ folgt nicht $f = 0$. (Beispiel wieder $\chi_{\mathbb{Q}}$ bzgl. $\lambda = \mathcal{L}^1$)

Man kann nur schließen : $\|f\|_1 = 0 \Longrightarrow f = 0 \;\; \lambda$ - f.ü.

Also definiert $\|\cdot\|_1$ keine Norm auf $\tilde{L}^1$.

"<u>falscher Ausweg</u>" : im konkreten Fall $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\lambda = \mathcal{L}^n$ könnte man versuchen, den folgenden Raum zu betrachten

$$\tilde{L}^1 = \left\{ u \in C^0(\Omega) : \int_\Omega |u| \, d\mathcal{L}^n < \infty \right\}$$

$\rightarrow$ Aus $\|u\|_1 = 0$ folgt dann tatsächlich $u = 0$, denn eine stetige Funktion, die $\mathcal{L}^n$ - f.ü. verschwindet, ist identisch 0.

Aber: $C^0(\Omega)$ <u>versehen mit der Norm</u> $\|\cdot\|_1$ <u>ist nicht vollständig</u> !

<u>Beispiel</u> : (prüfe die Einzelheiten!)

Sei $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$, $u_k(x) = x_1 \left(\frac{1}{k} + |x| \right)^{-1}$, $k \in \mathbb{N}$.

Die Funktionen u_k sind stetig auf Ω, es sei

$$u_0(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ x_1/|x|, & x \neq 0 \end{cases}.$$

Dann gilt $u_k(x) \to u_0(x)$ für $x \neq 0$ sowie

$|u_k(x)| \leq 1$, also nach dem Satz von Lebesgue über majorisierte Konvergenz (An. III, 25.7)

$$\int_\Omega |u_k - u_0|\, dx^n \longrightarrow 0, \; k \to \infty,$$

mithin

$$\int_\Omega |u_k - u_l|\, dx^n \longrightarrow 0 \;, \; k, l \longrightarrow \infty.$$

Also ist $\{u_k\}$ Cauchy Folge aus $C^0(\Omega)$ bzgl. $\|\cdot\|_1$. Es gibt aber keine stetige Funktion u mit $\|u_k - u\|_1 \longrightarrow 0$, $k \to \infty$, denn daraus würde folgen: $u = u_0$ für $x \neq 0$. Mithin wäre u stetige Fortsetzung von u_0 in 0 hinein, u_0 kann aber ersichtlich nicht stetig fortgesetzt werden.

Das Beispiel zeigt, daß "schwache Normen" (, die durch Integrale definiert werden,) nicht mit den klassischen Räumen von Funktionen (etwa C^0) verträglich sind.

bzgl. integraler Normen; i.a.

Cauchy Folgen konvergieren gegen unstetige Funktionen.

Gerade die Variationsrechnung zwingt aber dazu, mit integralen Normen zu arbeiten. Wir kehren deshalb zum Ausgangspunkt unserer Überlegungen zurück und erweitern den Begriff "meßbare Funktion" ein wenig, was dazu führt, daß das 2^{te} Problem (Indefinitheit von $\|\cdot\|_1$) "wegdefiniert" wird.

Sei (X,λ) wieder ein allgemeiner Maßraum. Für λ - meßbare $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ sei

$$[f] = \{ g : X \to \overline{\mathbb{R}} \; : \; f = g \quad \lambda\text{-f.ü.} \} .$$

Offenbar gilt: $[f]$ ist die Äquivalenzklasse bzgl. der Äquivalenzrelation

$$\varphi \sim \psi \iff \varphi = \psi \quad \lambda\text{-f.ü.}$$

auf der Menge der λ - meßbaren Funktionen. Es gilt:

i) f ist λ - integrierbar $\iff$ alle $g \in [f]$ sind λ - integrierbar; in diesem Fall hat man: $\int_X f \, d\lambda = \int_X g \, d\lambda$

ii) $[0] = \{ g : X \to \overline{\mathbb{R}} \; : \; g = 0 \quad \lambda\text{-f.ü.} \}$

iii) sind $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ λ - meßbar und f.ü. endlich, so machen $[f+g]$ sowie $[cf]$ Sinn, $c \in \mathbb{R}$

__Definition:__ Eine __λ - f.ü. eindeutig definierte Funktion__ $X \to \overline{\mathbb{R}}$ ist die Äquivalenzklasse $[u]$ einer λ - meßbaren, f.ü. endlichen Funktion $u : X \to \overline{\mathbb{R}}$.

__Bemerkung:__ Eine f.ü. eindeutig definierte Funktion kann nicht punktweise ausgewertet werden, man kann lediglich ein eindeutiges Integral definieren (, falls $\int_X |u| \, d\lambda < \infty$).

Punktweise Aussagen sind nur mit der Wahl von <u>Vertretern</u> oder <u>Repräsentanten</u> möglich.

<u>Beispiele</u>: i) "Eine f.ü. definierte Funktion ist $\geq, =, \leq 0$" heißt: jeder Vertreter $v \in [u]$ ist $\geq, =, \leq 0$ λ-f.ü.

<u>Konkret</u>: $[\chi_{\mathbb{Q}}]$ ist $= 0$ (bzgl. $\mathcal{L}^1$ auf $\mathbb{R}$).

ii) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\lambda = \mathcal{L}^n$. "Die f.ü. eindeutig definierte Funktion ist stetig oder C^k auf Ω" heißt: es gibt einen (und dann auch nur genau einen!) Vertreter $v \in [u]$ mit dieser Eigenschaft.

<u>Konvention</u>: Nachfolgend identifizieren wir eine λ-meßbare, f.ü. endliche meßbare Funktion $u: X \to \overline{\mathbb{R}}$ mit ihrer Äquivalenzklasse $[u]$. Dies wird nicht mehr explizit gesagt, sollte aber stets in Erinnerung bleiben!

<u>Definition</u>: $\left(L^p(X, \lambda) \text{ für } 1 \leq p < \infty \right)$

Sei (X, λ) ein Maßraum. Für $1 \leq p < \infty$ und λ-f.ü. eindeutig definierte Funktionen u sei $\|u\|_p = \left(\int_X |u|^p \, d\lambda \right)^{1/p} \in [0, \infty]$.

Der Lebesgue L^p-Raum besteht aus allen λ-f.ü. eindeutig definierten Funktionen u mit $\|u\|_p < \infty$. Man schreibt $L^p(X, \lambda)$ für diese Menge.