$C^\infty(\Omega_{(\varepsilon)})$ von $X(\Omega_{(\varepsilon)})$ ab.

Zum Beweis von Approximationssätzen ist dann natürlich die Frage wichtig, ob $J_\varepsilon(u)$ bei $\varepsilon \downarrow 0$ auch in der Norm des Raumes $X(\Omega_{(\varepsilon_0)})$ gegen $u|_{\Omega_{(\varepsilon_0)}}$ konvergiert.* Diese Frage ist positiv zu beantworten abgesehen von dem Fall, daß sich die Norm aus L^∞ - Normen zusammensetzt. Ist nämlich $X(\Omega) = L^\infty(\Omega)$, so gilt i.a. nicht $J_\varepsilon u \xrightarrow[\varepsilon\downarrow 0]{} u$ lokal gleichmäßig auf Ω, denn in diesem Fall müßte ja u zwangsläufig stetig sein. Entsprechendes gilt für die Räume $W^{k,\infty}(\Omega)$ mit $k \geq 1$.

(* Gemeint ist: fixiere $\varepsilon_0 > 0$ und untersuche $J_\varepsilon u \xrightarrow[\varepsilon\downarrow 0]{} u$ auf $\Omega_{(\varepsilon_0)}$ in der $X(\Omega_{(\varepsilon_0)})$ - Norm bzw. lokale Konvergenz auf kompakten Teilmengen)

Im folgenden Satz wird das Konvergenzverhalten genau beschrieben:

<u>SATZ 3.2</u>: ("Konvergenz $J_\varepsilon u \xrightarrow[\varepsilon\downarrow 0]{} u$").

i) u stetig auf $\Omega \implies J_\varepsilon u \xrightarrow[\varepsilon\downarrow 0]{} u$ lokal gleichmäßig auf Ω

$u \in C^k(\Omega) \implies D^\alpha(J_\varepsilon u) \xrightarrow[\varepsilon\downarrow 0]{} D^\alpha u$ — " —
für alle $|\alpha| \leq k$

Ist u zusätzlich aus $C^{k,\beta}(\Omega)$, so bleiben die Hölder - Normen der k-ten Ableitungen beschränkt, allerdings liegt keine lokale Konvergenz in der $C^{k,\beta}$- Norm vor.

ii) $u \in L^p_{loc}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty \implies J_\varepsilon u \xrightarrow[\varepsilon\downarrow 0]{} u$ in $L^p(K)$ für alle

$K \subset\subset \Omega$.

Ist $u \in L^p(\Omega)$, $1 \le p < \infty$, und u_0 die Fortsetzung von u durch 0 auf ganz $\mathbb{R}^n$, so ist $J_\varepsilon u_0 \xrightarrow[\varepsilon \downarrow 0]{} u$ in $L^p(\Omega)$. Außerdem gilt für $u \in L^p_{loc}(\Omega)$ auch im Fall $p = \infty$:

$$J_\varepsilon u\,(x) \xrightarrow[\varepsilon \downarrow 0]{} u(x)$$

punktweise fast überall.

iii) Ist $u \in W^{k,p}_{loc}(\Omega)$, so gilt für jede offene Menge $D \subset\subset \Omega$
$J_\varepsilon u \xrightarrow[\varepsilon \downarrow 0]{} u$ in $W^{k,p}(D)$, vorausgesetzt $p < \infty$.

Darüberhinaus ist $D^\alpha (J_\varepsilon u)(x) \xrightarrow[\varepsilon \downarrow 0]{} D^\alpha u(x)$ für $\mathcal{L}^n$-fast alle Punkte $x \in \Omega$, $|\alpha| \le k$, wobei auch $p = \infty$ zugelassen ist.

Beweis: i) Es genügt offensichtlich, die lokale gleichmäßige Konvergenz $J_\varepsilon u \longrightarrow u$ für stetiges $u \in C^0(\Omega)$ zu beweisen, die anderen Aussagen folgen dann trivial, wenn man zusätzlich beachtet, daß J_ε nach dem vorigen Satz die Hölder-Norm nicht vergrößert.
Wir haben für $x \in K \subset\subset \Omega$

$$|J_\varepsilon u(x) - u(x)| = \left| \int_{B_\varepsilon(x)} j_\varepsilon(y-x)\,[u(y) - u(x)]\,dy \right|$$

äußere Parallelmenge

Ist K' kompakt in Ω mit $K_\varepsilon \subset K'$, so liegen die Punkte y aus $B_\varepsilon(x)$ für $\varepsilon << 1$ in K', also für alle $x \in K$:

$$|J_\varepsilon u(x) - u(x)| \le \sup_{\substack{z,y \in K' \\ |z-y| \le \varepsilon}} |u(z) - u(y)| \cdot \underbrace{\int_{B_\varepsilon(x)} j_\varepsilon(y-x)\,dy}_{=1},$$

und da u auf dem Kompaktum K' gleichmäßig stetig ist, gilt

$$\sup \{ |u(x) - u(z)| : x, z \in K', |x-z| < \varepsilon \} \xrightarrow[\varepsilon \downarrow 0]{} 0,$$

d.h. $J_\varepsilon u \to u$ gleichmäßig auf K bei $\varepsilon \downarrow 0$.

Lokale L^p-Konvergenz für $p < \infty$: Wähle K kompakt in Ω.

ii) Es sei ε_0 fixiert mit $K_{\varepsilon_0} \subset\subset \Omega$. Für $u \in L^p_{loc}(\Omega)$, $v \in C^0(K_{\varepsilon_0})$ bekommt man

$$\| J_\varepsilon u - u \|_{L^p(K)} \le \| J_\varepsilon u - J_\varepsilon v \|_{L^p(K)} + \| J_\varepsilon v - v \|_{L^p(K)} + \| u - v \|_{L^p(K)}$$

$$\overset{\text{Satz 3.1 ii)}}{\le} \| u - v \|_{L^p(K_{\varepsilon_0})} + \| J_\varepsilon v - v \|_{L^p(K)} + \| u - v \|_{L^p(K)}.$$

$\delta > 0$ sei gegeben. Da $C^0(K_{\varepsilon_0})$ dicht in $L^p(K_{\varepsilon_0})$ liegt, findet man ein v mit $\| u - v \|_{L^p(K_{\varepsilon_0})} < \delta$. Dann ist natürlich auch

$$\| u - v \|_{L^p(K)} < \delta, \quad \text{gemäß } J_\varepsilon v \xrightarrow[\varepsilon \downarrow 0]{} v \text{ gleichmäßig auf } K,$$

liegt natürlich auch $L^p(K)$-Konvergenz vor, d.h. $\| J_\varepsilon v - v \|_{L^p(K)} < \delta$ für $\varepsilon \le \varepsilon_\delta$. Man bekommt $\| J_\varepsilon u - u \|_{L^p(K)} \le 3 \cdot \delta$ für alle kleinen ε.

Dieser Beweis versagt für $p = \infty$, denn man kann ja $u \in L^\infty_{loc}(\Omega)$ nicht gleichmäßig durch stetige v approximieren. Die $L^p(\Omega)$-Konvergenz von $J_\varepsilon u_0$ gegen u ergibt sich trivial aus $J_\varepsilon u_0 \xrightarrow[\varepsilon \downarrow 0]{} u_0$ in $L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$. (analog für $W^{k,p}$)

, also die punktweisen f.ü. Konvergenz

Zum Beweis der letzten Aussage benutzt man den Satz über Lebesgue-Punkte. Dazu sei ab jetzt u ein fester Vertreter; nach dem genannten Satz gilt dann abgesehen von einer Nullmenge $u(x) = \lim_{\rho \downarrow 0} \fint_{B_\rho(x)} u \, dz$.

Wir rechnen mit diesem Vertreter

Es folgt für fast alle $x \in \Omega$

$$|J_\varepsilon u(x) - u(x)| \leq \int_{B_\varepsilon(x)} j_\varepsilon(y-x)\, |u(y) - u(x)|\, dy \leq$$

$$c \cdot \varepsilon^{-n} \int_{B_\varepsilon(x)} |u(y) - u(x)|\, dy \leq \tilde{c} \fint_{B_\varepsilon(x)} |u - u(x)|\, dy ,$$

und wieder nach einer Version des Lebesgue'schen Differentiationssatzes ist

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \fint_{B_\varepsilon(x)} |u - u(x)|\, dy = 0$$

in $\mathcal{L}^n$- f.a. $x \in \Omega$.

iii) folgt aus ii).

Die Glättungen $J_\varepsilon(u)$ haben zwar gute Konvergenz- und Approximationseigenschaften, doch leider nur auf kompakten Teilgebieten. Der folgende Satz zeigt, daß man Sobolev-Funktionen $u \in W^{k,p}(\Omega)$ global durch glatte Funktionen approximieren kann.

SATZ 3.3: (globale Approximation)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $k \in \mathbb{N}_0$ und $1 \leq p < \infty$.

i) Zu $u \in W^{k,p}_{loc}(\Omega)$ gibt es eine Folge (u_k) in $C_0^\infty(\Omega)$ mit $u_k \to u$ in $W^{k,p}(D)$ für alle $D \subset\subset \Omega$.

ii) $\boxed{C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega) \text{ liegt dicht in } W^{k,p}(\Omega)}$

$$\left(\text{" } H = W \text{ "} \right)$$

Anmerkung zu (ii): Es sei $H^{k,p}(\Omega)$ die sogenannte Vervollständigung des normierten Raumes

$$X := \{ u \in C^k(\Omega) : \|u\|_{W^{k,p}} < \infty \}$$

(auf X wählen wir natürlich die Norm $\|\cdot\|_{W^{k,p}}$ bzgl. derer X unvollständig ist). Darunter versteht man folgenden abstrakten Begriff: $\tilde{X}$ sei die Menge aller Cauchy-Folgen von Elementen aus X, wobei wir zwei Cauchy-Folgen identifizieren, wenn die Differenzfolge gegen 0 strebt. Der Raum X ist eingebettet in $\tilde{X}$, indem man $x \in X$ die (Aequivalenzklasse der) konstanten Folge $(x, x \dots)$ zuordnet. In der üblichen Weise macht man $\tilde{X}$ zum linearen Raum, auf dem man durch

$$\|(x_n)\| := \lim_{n\to\infty} \|x_n\| \quad \left(\text{existiert, da } \|x_n\| \text{ C.F. in } \mathbb{R}\right)$$

eine Norm einführt. Dann zeigen einfache Überlegungen:

a) X ist dicht in $\tilde{X}$.

b) $\tilde{X}$ ist ein Banachraum.

c) Ist Z ein Banachraum, in den X als dichte Teilmenge eingebettet werden kann, so ist Z isometrisch isomorph zu $\tilde{X}$. ("Eindeutigkeit")

(Man vergleiche dazu [Yosida, p. 56]) Die Aussage (ii) zusammen mit c) kann so interpretiert werden, daß unser Sobolev-Raum $W^{k,p}(\Omega)$ ein konkretes Modell der abstrakten Vervollständigung $H^{k,p}(\Omega)$ des Raumes X ist. In diesem Sinn gilt

$$\boxed{H^{k,p}(\Omega) = W^{k,p}(\Omega)},$$

und diese Formulierung kennt man in der Literatur auch als Satz von Meyers und Serrin. (1964)

Beweis: (i) Sei Ω_k kompakte Ausschöpfung von Ω, d.h.

$$\Omega_k \text{ offen } \subset\subset \Omega, \quad \Omega_k \subset \Omega_{k+1}, \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_k = \Omega,$$

wir verlangen hier noch $\overline{\Omega}_k \subset \Omega_{k+1}$. Beispielsweise kann man

$$\Omega_k := \{ x \in \Omega \cap B_k(0) : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > 1/k \}$$

wählen, wobei man ggf. erst ab genügend großem Index k zu zählen beginnt, um $\Omega_k \neq \emptyset$ zu garantieren. Der Durchschnitt $\Omega \cap B_k(0)$ ist nur bei unbeschränkten Gebieten Ω für die relative Kompaktheit der Ω_k nötig. Wird Ω schon als beschränkt vorausgesetzt, so betrachtet man einfach die inneren Parallelmengen im Abstand $1/k$.

Zu jedem $k \in \mathbb{N}$ wählt man eine Abschneidefunktion η_k mit $\eta_k \equiv 1$ auf $\overline{\Omega}_k$ und $\operatorname{spt}(\eta_k) \subset \Omega_{k+1}$. (Eine solche Folge bekommt man durch Glättung der charakteristischen Funktion $\mathbb{1}_{\tilde{\Omega}_k}$ mit sehr kleinem Radius, wobei $\tilde{\Omega}_k$ ein "Zwischengebiet" ist mit $\Omega_k \subset\subset \tilde{\Omega}_k \subset\subset \Omega_{k+1}$.)

Eine Nullfolge ε_k wird so eingerichtet, daß

$$\| J_{\varepsilon_k}(u) - u \|_{W^{k,p}(\Omega_k)} \leq 1/k$$

gilt. Dies geht nach dem vorigen Satz, da $J_\varepsilon(u) \xrightarrow[\varepsilon \downarrow 0]{} u$ in $W^{k,p}(D)$ für $D \subset\subset \Omega$. Die gesuchte Folge u_k sei nun

$$u_k := \begin{cases} J_{\varepsilon_k} u \cdot \eta_k & \text{auf } \Omega_{k+1}, \\ 0 & \text{auf } \Omega - \Omega_{k+1} \end{cases}$$

$J_{\varepsilon_k} u$ liegt in $C^\infty(\Omega_{(\varepsilon_k)})$, und für ε_k genügend klein sieht man $\Omega_{k+1} \subset\subset \Omega_{(\varepsilon_k)}$, so daß u_k als C^∞-Funktion auf Ω mit Träger in $\overline{\Omega}_{k+1}$ angesehen werden kann.

Zu zeigen ist jetzt: $u_k \xrightarrow[k\to\infty]{} u$ in $W^{k,p}(D)$ für jedes Gebiet $D \subset\subset \Omega$. Zu festem D wählt man k mit $D \subset\subset \Omega_k$. Es folgt:

$$\| u_k - u \|_{W^{k,p}(D)} \le \| u_k - u \|_{W^{k,p}(\Omega_k)} \overset{\eta_k = 1 \text{ auf } \Omega_k}{=}$$

$$\| J_{\varepsilon_k}(u) - u \|_{W^{k,p}(\Omega_k)} \le 1/k$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $D \subset \Omega_k$.

→ <u>vgl. ab hier die Seiten 1^*–12^*</u> !

(ii) Die Ω_k, $k \in \mathbb{N}$, seien wie oben, man setzt $\Omega_0 := \Omega_{-1} = \emptyset$ und bekommt mit $(\Omega_{k+1} - \overline{\Omega}_{k-1})_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine offene Überdeckung von Ω:

Sei $D_k := \Omega_{k+1} - \overline{\Omega}_{k-1}$, $k \geq 0$. Wäre $\Omega \supsetneqq \bigcup_{k=0}^{\infty} D_k$, so gäbe es $x \in \Omega$, das zu keiner der Mengen D_k gehört. Man wählt dann $k \in \mathbb{N}$ <u>minimal</u> mit $x \in \Omega_k$. Gemäß $D_0 = \Omega_1$, $D_1 = \Omega_2$ muß $k \geq 2$ sein. $x \in \Omega_k$ und $x \notin D_{k-1} = \Omega_k - \overline{\Omega}_{k-2}$ ergibt dann aber $x \in \overline{\Omega}_{k-2}$, also $x \in \Omega_{k-1}$, da $\overline{\Omega}_{k-2} \subset\subset \Omega_{k-1}$. Dies steht im Widerspruch zur Wahl von k.

Nach dem Lemma über die Zerlegung der Eins [Adams, 3.14 Theorem, Seite 51] gibt es eine Folge $\{\psi_k\}$ in $C_0^\infty(\Omega)$ wie folgt:

(1) $\operatorname{spt} \psi_k \subset D_k$

Beweis von (ii) nach der Vorlage von Meyers + Serrin:

Sei $(\Omega_k)_{k\in\mathbb{N}}$ wie oben kompakte Ausschöpfung. Man betrachtet jetzt die

„Ringe“ $D_k := \Omega_{k+1} - \overline{\Omega}_{k-1}$, $k \in \mathbb{N}_0$,

wobei $\Omega_0 := \Omega_{-1} := \emptyset$.

$D_1 = \Omega_2$, $D_0 = \Omega_1$

Es gilt D_k offen mit $\boxed{\Omega = \bigcup_{k=0}^{\infty} D_k}$

Lemma über die Zerlegung der 1

(vgl. Adams, Sobolev spaces, 3.14 Thm, p. 51)

$\Longrightarrow \quad \exists\, \psi_k \in C_0^\infty(\Omega),\ k \in \mathbb{N}_0$, wie folgt:

(1) $\operatorname{spt} \psi_k \subset D_k$

(2) Die Trägerfamilie ist lokal endlich:

$\forall$ K kompakt $\subset \Omega$ ist $K \cap \operatorname{spt} \psi_k \neq \emptyset$
für höchstens endlich viele k

(3) $0 \leq \psi_k \leq 1, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \equiv 1$ auf Ω

(Bem: das Lemma hat nichts mit Sobolevräumen zu tun!)

Sei jetzt $u \in W^{k,p}(\Omega)$, $\varepsilon > 0$ sei gegeben. Wir suchen $v \in C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ mit

$$\| u - v \|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq \varepsilon.$$

beachte: $\Psi_m u \in W^{k,p}(\Omega)$

(Beweis: $k=1 \rightsquigarrow$ rechne nach, dass $\partial_i \Psi_m \cdot u + \Psi_m \cdot \partial_i u$ die Def. der schwachen i-ten Ableitung für $\Psi_m \cdot u$ erfüllt; $k \rightsquigarrow k+1$ Induktion)

$v_m := \Psi_m u$ hat kompakten Träger in $D_m \Longrightarrow$ für $\varepsilon_m > 0$ sehr klein hat auch $J_{\varepsilon_m}(v_m)$ kompakten Träger in D_m und kann als $C_0^\infty(\Omega)$-Funktion angesehen werden,

außerdem: $\| J_\delta(v_m) - v_m \|_{W^{k,p}(\Omega)} \xrightarrow{\delta \downarrow 0} 0$ nach dem vorigen Satz (man muss die Norm ja nur über D offen mit $\operatorname{spt} v_m \subset D \subset\subset \Omega$ auswerten!) $\Longrightarrow$ ε_m kann so gewählt werden, dass

$$\| J_{\varepsilon_m}(v_m) - v_m \|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq \varepsilon\, 2^{-m}$$

ist (wähle bei festem m δ entsprechend und nenne ein solches δ dann ε_m)

<u>Kandidat</u>: $v := \sum_{m=0}^{\infty} J_{\varepsilon_m}(v_m)$

- aus (2) folgt, dass bei gegebenem Kompaktum K es auch nur endlich viele m gibt mit

  $K \cap \operatorname{spt} J_{\varepsilon_m}(v_m) \neq \emptyset$

speziell: ist $x \in \Omega$, so folgt $J_{\varepsilon_m}(v_m)(x) \neq 0$ für höchstens endlich viele m

$\Longrightarrow$ v ist wohldefiniert und $\in C^\infty(\Omega)$, da jedes $J_{\varepsilon_m}(v_m)$ das ist

- Zu zeigen: $\boxed{v \in W^{k,p}(\Omega) \text{ und } \|u-v\|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq \varepsilon}$

(beachte: $v \in C^\infty(\Omega)$ ergibt nur $v \in W^{k,p}_{loc}(\Omega)$!)

Man benutzt folgenden Trick: Sei $\Omega' \subset\subset \Omega$. Dann ist

$$\|u-v\|_{W^{k,p}(\Omega')} = \Big\|\sum_{m=0}^{\infty} J_{\varepsilon_m}(\psi_m u) - u\Big\|_{W^{k,p}(\Omega')}$$

$$\underset{\sum \psi_m \equiv 1}{=} \Big\| \sum_{m=0}^{\infty} \big(J_{\varepsilon_m}(\psi_m u) - \psi_m u\big)\Big\|_{W^{k,p}(\Omega')} \leq$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left\| J_{\varepsilon_m}(\psi_m u) - \psi_m u \right\|_{W^{k,p}(\underline{\underline{\Omega}})} \leq$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} 2^{-m} \varepsilon = \varepsilon . \qquad \Longrightarrow$$

$$\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega'} |D^\alpha (u-v)|^p \, dx \leq \varepsilon^p$$

Lemma von Fatou $\Longrightarrow$

$$\int_\Omega |D^\alpha (u-v)|^p \, dx \leq \liminf_{m \to \infty} \underbrace{\int_{\Omega_m} |D^\alpha (u-v)|^p \, dx}_{= \int_\Omega \chi_{\Omega_m} |D^\alpha (u-v)|^p \, dx}$$

Also: $$\sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega |D^\alpha (u-v)|^p \, dx \leq \varepsilon^p$$

$\Longrightarrow \quad u - v \in W^{k,p}(\Omega)$,

also $\quad v \in W^{k,p}(\Omega)$ mit der Abschätzung.

$\square$

Die Einbettung $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ war bei der Diskussion von $W^{1,p}(\Omega)$ wenig hilfreich, denn sie „vergisst" schwache Ableitungen. Andererseits ist sie nicht so schlecht

<u>Satz 3.4</u> : (Einbettungssatz von Rellich für $p=2$ bzw. Kondraschoff für allg. p)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und <u>beschränkt</u> sowie $p < \infty$. Dann ist die Einbettung

$$\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

<u>kompakt</u>.

<u>Bem</u> : 1.) Der stetige lineare Operator $T: X \to Y$ heißt <u>kompakt</u>, wenn gilt: Ist $\{x_n\}$ beschränkt in X, so enthält $\{Tx_n\}$ eine (norm-) konvergente <u>Teilfolge</u>.

2.) klar: $\overset{\circ}{W}{}^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow \overset{\circ}{W}{}^{l,p}(\Omega)$

kompakt für $k > l$, $p < \infty$, Ω beschränkt

3.) Man hat auch

$$\underline{\text{Kompaktheit von}} \quad W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega),$$

wenn z.B. $\partial\Omega$ stückweise glatt ist.

4.) Satz 3.4 besagt konkret: weiß man

$$(*) \quad \sup_n \int_\Omega |\nabla u_n|^p dx + \int_\Omega |u_n|^p dx < \infty$$

für eine Folge $\{u_n\}$ in $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega)$ (z.B. Minimalfolge eines Variationsproblems), so findet man eine Teilfolge $\{\tilde{u}_n\}$ und ein $u \in L^p(\Omega)$ mit

$$\|\tilde{u}_n - u\|_{L^p(\Omega)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 .$$

Eine weitere Teilfolge $\{\tilde{\tilde{u}}_n\}$ konvergiert auch punktweise fast überall gegen u.

<u>Wie wendet man das an?</u>

Sei $p > 1$ und

$$J(u) = \int_\Omega |\nabla u|^p dx + \int_\Omega g(u)\, dx$$

$\rightsquigarrow$ min auf $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega)$

mit z. B. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt.

Dann lässt sich ✻ für eine Minimalfolge $\{u_n\}$ ableiten, nämlich mit der Poincaré Ungl., die aus S.3.4 fest, und wegen der Reflexivität ($p > 1$) findet man eine Teilfolge $\{u_n'\}$ sowie $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega)$ mit $u_n' \rightharpoonup u$ in $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega)$.

Es folgt (Begründung?): $\| u_n' - u \|_{L^p(\Omega)} \longrightarrow 0$, also f. ü.

$u_n''(x) \to u(x)$ für eine weitere Teilfolge, mithin (maj. Kvgnz)

$$\int_\Omega g(u_n'')\,dx \longrightarrow \int_\Omega g(u)\,dx .$$

Wegen $\int_\Omega |\nabla u|^p dx \le \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega |\nabla u_n''|^p dx$ (Uhst der Norm bei schwacher Konvergenz) folgt:

u löst das Problem $J \longrightarrow \min.$

<u>Die starke L^p-Kvgnz ermöglicht also die Behandlung des g-Terms.</u>

5) Was passiert für $p = \infty$?

Ist z.B. Ω eine Kugel in $\mathbb{R}^n$, so werden wir später zeigen:

a) $W^{1,\infty}(\Omega) = \{ u : \Omega \to \mathbb{R} \mid u$ ist Lipschitz auf $\Omega \}$

(also: $\exists L \geq 0$ $|u(x) - u(y)| \leq L|x-y| \quad \forall x, y \in \Omega$;

daraus folgt $u \in L^\infty(\Omega)$ gemäß

$|u(x)| \leq |u(x_0)| + L \cdot |x_0 - x|$, wenn x_0 fest ist)

$\rightarrow$ u Lipschitz fortsetzbar auf $\overline{\Omega}$

b) für $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ ist $\|\nabla u\|_{L^\infty}$ die optimale Lipschitz-Konstante

Was kann man nun aus

$$\sup_n \|u_n\|_{W^{1,\infty}} < \infty$$

für eine Folge $u_n \in W^{1,\infty}(\Omega)$ schließen?

Antwort gibt der (wähle dort $S = \overline{\Omega}$)

Satz (von Arcela - Ascoli):

Sei $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge stetiger Funktionen $S \to \mathbb{R}$ auf der kompakten Menge $S \subset \mathbb{R}^n$. Es gelte:

i) $\sup\limits_n \sup\limits_S |f_n| < \infty$

ii) $\sup\limits_n |f_n(x) - f_n(y)| \to 0$ für $|x-y| \to 0$

(Beschränktheit + gleichgradige Stetigkeit)

Dann hat $\{f_n\}$ eine gleichmäßig konvergente Teilfolge.

($\Rightarrow$ u_n hat eine glm. konvergente Teilfolge)

(vgl. Alt, Lineare Funktionalanalysis, p. 69)

Bem: ii) gilt, wenn z.B.

ii)' $|f_n(x) - f_n(y)| \leq L\, |x-y|^\alpha \quad \forall x, y \in S$

mit $\alpha \in (0,1]$ und $L \geq 0$ unabhängig von n.

Dann kann man i) abschwächen zu

i)' $$\sup_n |f_n(x)| \leq C(x) < \infty \quad \forall x \in S$$

denn ist $x_0 \in S$ fest und $x \in S$ beliebig, so folgt:

$$|f_n(x)| \leq |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0)|$$

$$\leq C(x_0) + L\,|x - x_0|^\alpha \leq C(x_0) + L\,(\operatorname{diam} S)^\alpha,$$

so dass man i) durch Kombination von i)', ii)' bekommt.

Als eine Anwendung sieht man:

$$\left.\begin{array}{l} f_n \to f \text{ punktweise,} \\ \{f_n\} \text{ uniform } \alpha\text{-Hölder-stetig} \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$f_n \to f \text{ gleichmäßig.} \qquad \square$$

<u>Fazit</u>: Satz 3.4 ist eine Version von Arzela-Ascoli auf $W^{1,p}$ bzw. L^p-Niveau.

Zum Beweis von Satz 3.4 brauchen wir ein

Lemma: (Beschreibung relativ kompakter Teilmengen von L^p)

Sei $1 \leq p < \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $A \subset L^p(\Omega)$. Dann sind äquivalent:

i) A ist relativ kompakt in $L^p(\Omega)$, d.h. jede beschränkte Folge hat eine konvergente Teilfolge (Limes nicht notwendig $\in A$)

ii) A ist beschränkt in $L^p(\Omega)$ und

$J_\varepsilon(u_0) \xrightarrow[\varepsilon \downarrow 0]{} u_0$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$ gleichmäßig bzgl. $u \in A$ $\left(u_0 := \begin{cases} u & \text{auf } \Omega \\ 0 & \text{auf } \mathbb{R}^n - \Omega \end{cases} \right)$

Beweis: —

Beweis des Einbettungssatzes:

$\longrightarrow$ Manuskript, p. 133

(2) Die Trägerfamilie ist lokal endlich, d.h. ist K kompakt in Ω, so gilt $\operatorname{spt} \psi_k \cap K \neq \emptyset$ für höchstens endlich viele Indices k.

(3) $0 \leq \psi_k \leq 1$, $\sum_{k=0}^{\infty} \psi_k = 1$ auf Ω

Eine einfache Rechnung zeigt $\psi_m \cdot u \in W^{k,p}(\Omega)$ (die schwache Ableitung $D_i(\psi_m \cdot u)$ wird z.B. erzeugt von $D_i \psi_m \cdot u + D_i u \cdot \psi$, weiter schließt man induktiv, vgl. dazu auch das Kapitel über "Rechenregeln")

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Man wählt $\varepsilon_m \downarrow 0$ folgendermaßen: Da $\psi_m \cdot u =: v_m$ kompakten Träger hat in D_m, liegt $\operatorname{spt} J_{\varepsilon_m}(v_m)$ ebenfalls in D_m, vorausgesetzt $\varepsilon_m << 1$. (ε_m muß kleiner sein als der Abstand von $\operatorname{spt} \psi_m$ zu ∂D_m) Außerdem liefert die Kompaktheit des Trägers von v_m in Ω (kombiniert mit der bekannten lokalen Konvergenz)

$$\| J_\varepsilon(v_m) - v_m \|_{W^{k,p}(\Omega)} \xrightarrow[\varepsilon \downarrow 0]{} 0 ,$$

d.h. wir können ε_m zusätzlich so einrichten, daß

$$\| J_{\varepsilon_m}(v_m) - v_m \|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq 2^{-m} \cdot \varepsilon$$

ist. Sei $v := \sum_{m=0}^{\infty} J_{\varepsilon_m}(v_m)$. $J_{\varepsilon_m}(v_m)$ ist glatte Funktion auf Ω. Ist Ω' ein kompakt in Ω enthaltenes Teilgebiet, so gibt es einen Index m_0 und eine kompakte Menge $K \subset \Omega$ mit

$$\Omega'_{\varepsilon_m} \subset K \quad \forall\, m \geq m_0$$

Nach Voraussetzung (2) gibt es aber nur endlich viele Indices $m_1, \dots, m_\ell \geq m_0$ mit $\operatorname{spt} \Psi_{m_i} \cap K \neq \emptyset$, $i = 1, \dots, \ell$. Es gilt

$$J_{\varepsilon_m} v_m(x) = \int_{B_{\varepsilon_m}(x)} \varphi_{\varepsilon_m}(y-x)\, \Psi_m(y) \cdot u(y)\, dy$$

$$\neq 0,$$

falls $B_{\varepsilon_m}(x) \cap \operatorname{spt} \Psi_m \neq \emptyset$. Wählt man daher $x \in \Omega'$ und $m \geq m_0$, $m \neq m_i$, so ist $B_{\varepsilon_m}(x) \subset K$ und $K \cap \operatorname{spt} \Psi_m = \emptyset$, d.h. $J_{\varepsilon_m} v_m(x) = 0$.

Anders gesagt: Zu jedem $\Omega' \subset\subset \Omega$ findet man $m' \in \mathbb{N}$, so daß $J_{\varepsilon_m}(v_m) \equiv 0$ ist für $m \geq m'$. Mithin macht die formale Reihe für v Sinn und definiert eine $C^\infty(\Omega)$- Funktion.

Zu zeigen bleibt $v \in W^{k,p}(\Omega)$ und $\|u - v\|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq \varepsilon$.

Dazu sei $\Omega' \subset\subset \Omega$. Als glatte Funktion (auf Ω) liegt v in $W^{k,p}(\Omega')$ mit

$$\|u - v\|_{W^{k,p}(\Omega')} = \left\| \sum_{m=0}^{\infty} J_{\varepsilon_m}(\Psi_m \cdot u) - u \right\|_{W^{k,p}(\Omega')} \overset{\sum \Psi_m = 1}{=}$$

$$\left\| \sum_{m=0}^{\infty} J_{\varepsilon_m}(\Psi_m u) - \Psi_m u \right\|_{W^{k,p}(\Omega')} \leq$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left\| J_{\varepsilon_m}(\Psi_m u) - \Psi_m u \right\|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq \sum_{m=0}^{\infty} 2^{-m} \cdot \varepsilon = 2 \cdot \varepsilon .$$

Da $\|u - v\|_{W^{k,p}(\Omega')} = \left\{ \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega'} |D^\alpha (u - v)|^p \, dx \right\}^{1/p}$ ist,

kann man jetzt den Satz von Lebesgue über majorisierte Konvergenz anwenden und bekommt (betrachte $\Omega' \uparrow \Omega$): $u - v \in W^{k,p}(\Omega)$ mit Norm $\leq 2 \cdot \varepsilon$. Da $u - v \in W^{k,p}(\Omega)$ ist und u ebenfalls in diesem Raum liegt, folgt $v \in W^{k,p}(\Omega)$ zusammen mit der gewünschten Approximationseigenschaft. ∎

Wir beschließen diesen Paragraphen mit einem Einbettungssatz, den man in vielen Anwendungsbeispielen benötigt.

SATZ 3.4 (von Rellich für $p = 2$, Kondraschoff für allg. p)

> Für beschränkte offene Mengen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $1 \leq p < \infty$ ist die Einbettung $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)$ kompakt.

Anmerkungen: 1) Kompaktheit bedeutet, daß beschränkte Mengen in $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega)$ auf relativ kompakte Mengen in $L^p(\Omega)$ abgebildet werden, noch anders gesagt: Ist $\{u_m\}$ eine normbeschränkte Folge im Raum $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega)$, so findet man eine Teilfolge, die stark in $L^p(\Omega)$ konvergiert.

2) Eine andere Beschreibung des Satzes ist die Feststellung, daß es sich bei der Einbettung um einen vollstetigen Operator handelt. Ein Operator $A: X \rightarrow Y$ zwischen normierten Räumen heißt vollstetig, wenn er schwach in X konvergente Folgen in normkonvergente Folgen transportiert. Da schwach konvergente Folgen beschränkt sind, sind kompakte Operatoren vollstetig; für reflexive Räume sind die beiden Begriffsbildungen aequivalent.

3) Eine offensichtliche Verallgemeinerung des Satzes liefert für $k > l$ die Kompaktheit der Einbettung $\overset{\circ}{W}{}^{k,p}(\Omega) \rightarrow \overset{\circ}{W}{}^{l,p}(\Omega)$.

4) Die Kompaktheit der entsprechenden Einbettung

$$W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow L^p(\Omega)$$

ist nicht für jede offene beschränkte Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ richtig. Man muß vielmehr gewisse (schwache) Regularitätsbedingungen an $\partial\Omega$ stellen, die z.B. erfüllt sind, wenn $\partial\Omega$ lokal als Graph einer stetigen Funktion (mit Ω auf einer Seite) geschrieben werden kann. Die Einzelheiten werden wir später besprechen, außerdem sei auf [Adams] verwiesen, wo man einige Kapitel über die Einbettungseigenschaften von $W^{k,p}(\Omega)$ in andere Räume findet.

5) Ist Ω z.B. eine Kugel, so gilt (wie wir noch sehen werden) $W^{1,\infty}(\Omega) = Lip(\Omega)$, und $\|Du\|_\infty$ ist die optimale Lipschitz-Konstante von u. Der Satz von Arzela ergibt, daß beschränkte Teilmengen von $Lip(\Omega)$ relativ kompakt sind in $L^\infty(\Omega)$. Satz 3.4 ist Ersatz dieser Tatsache für $p<\infty$. ∎

Der Beweis des Satzes beruht entscheidend auf einer expliziten Beschreibung der relativ kompakten Mengen in $L^p(\Omega)$, die mit Hilfe der Glättungsoperatoren möglich ist.

<u>LEMMA:</u> Sei $1 \le p < \infty$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen.

i) Sei $A \subset L^p_{loc}(\Omega)$. A ist genau dann relativ kompakt (d.h. jede Folge $\{u_n\}$ in A hat eine Teilfolge, die auf allen kompakten Teilmengen von Ω in der L^p-Norm konvergiert), wenn für alle kompakten Mengen $K \subset \Omega$ gilt:

$$J_\varepsilon u \to u \quad \text{in } L^p(K)$$

gleichmäßig bzgl. $u \in A$ und $\sup\{\|u\|_{L^p(K)} \mid u \in A\} < \infty$ für $K \subset\subset \Omega$

ii) Für <u>beschränkte</u> $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ hat man folgende Aequivalenz:

$$\left\{\begin{array}{l} A \subset L^p(\Omega) \text{ ist relativ kompakt } \Longleftrightarrow \\ A \text{ ist beschränkt in } L^p(\Omega) \text{ und} \\ J_\varepsilon(u_0) \xrightarrow[\varepsilon\downarrow 0]{} u_0 \text{ in } L^p(\mathbb{R}^n) \text{ gleichmäßig bzgl. } u \in A. \end{array}\right.$$

Dabei bezeichnet u_0 die triviale Fortsetzung durch 0 von u auf ganz $\mathbb{R}^n$.

<u>Anmerkung</u>: <u>Auf die Beschränktheit von Ω in (ii) kann man nicht verzichten.</u>

Beweis: i) „$\Rightarrow$" Sei $\tilde{K} \subset\subset \Omega$ fixiert. Zu $\delta > 0$ gibt es endlich viele Funktionen $u_1, \dots, u_l \in A$ mit der Eigenschaft:

$$* \left\{\begin{array}{l} \text{Ist } u \in A \text{ beliebig, so gibt es } u_i \\ \text{mit } \|u_i - u\|_{L^p(\tilde{K})} \leq \delta. \end{array}\right\}$$

$*$ sagt gerade, daß die δ-Kugeln um die Punkte u_i die Menge A im $L^p(\tilde{K})$-Sinn überdecken. Dies folgt aus der relativen Folgenkompaktheit der Menge A im o.g. Sinn: Wäre A nämlich nicht durch endlich viele δ-Kugeln überdeckbar, so bekäme man einen Widerspruch: Zu $\delta > 0$ beginnt man mit beliebigem $v_1 \in A$ und wählt $v_2 \in A$ mit $\|v_1 - v_2\|_{L^p(\tilde{K})} \geq \delta$. Angenommen man hat k-Funktionen $v_1, \dots, v_k \in A$ konstruiert, deren $L^p(\tilde{K})$-Abstand paarweise $\geq \delta$ ist. Dann existiert natürlich $v_{k+1} \in A$ mit $\|v_i - v_{k+1}\|_{L^p(\tilde{K})} \geq \delta$ (sonst würden die k Kugeln um $v_1, \dots, v_k$ die endliche Überdeckungseigenschaft haben), usw. Die Folge $\{v_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ aus A hat natürlich keine $L^p(\tilde{K})$-konvergente Teilfolge. Also gibt es $u_1, \dots, u_l$ mit $*$.

Nun zum eigentlichen Beweis: Sei $K \subset \Omega$ beliebige kompakte Teilmenge. Man wählt dann ε_0, so daß $\overline{K_{\varepsilon_0}} \subset\subset \Omega$ ist und betrachtet nur noch $\varepsilon \leq \varepsilon_0$. Nach dem vorhin Bewiesenen (mit $\tilde{K} := \overline{K_{\varepsilon_0}}$) gibt es $u_1, \ldots, u_\ell \in A$ mit der Eigenschaft $*$. Ist also $u \in A$ beliebig, so folgt:

$$\| J_\varepsilon(u) - u \|_{L^p(K)} \leq \| u_i - u \|_{L^p(K)} + \| J_\varepsilon(u) - u_i \|_{L^p(K)} \leq$$

$$\| u_i - u \|_{L^p(K)} + \| J_\varepsilon(u_i - u) \|_{L^p(K)} + \| J_\varepsilon(u_i) - u_i \|_{L^p(K)},$$

wobei $u_i \in \{u_1, \ldots, u_\ell\}$ so gewählt ist, daß

$$\| u - u_i \|_{L^p(\tilde{K})} \leq \tau$$

ausfällt. Dann ist natürlich auch $\|u_i - u\|_{L^p(K)} \leq \tau$ und

$$\| J_\varepsilon(u_i) - J_\varepsilon(u) \|_{L^p(K)} \leq \| u_i - u \|_{L^p(\tilde{K})} \leq \tau.$$

Schließlich beachtet man

$$J_\varepsilon(v) \xrightarrow[\varepsilon \downarrow 0]{L^p(K)} v \quad \forall v \in L^p_{loc}(\Omega),$$

also die punktweise Konvergenz auf $L^p(K)$. Man findet deshalb $\varepsilon_i > 0$ mit

$$\| J_\varepsilon(u_i) - u_i \|_{L^p(K)} \leq \tau \qquad \forall \varepsilon \leq \varepsilon_i;$$

wählt man also $\varepsilon \leq \min\{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_\ell\}$, so folgt

$$\| J_\varepsilon(u) - u \|_{L^p(K)} \leq 3\tau,$$

d.h. gleichmäßige Konvergenz auf $L^p(K)$.

„$\Longleftarrow$": Sei $\{u_k\}$ Folge in A und K beliebige kompakte Teilmenge von Ω. Wir zeigen:

$$** \left\{ \begin{array}{l} \text{Zu jedem } \delta > 0 \text{ gibt es eine Teilfolge } \{\tilde{u}_k\} \text{ mit} \\ \sup\limits_{k,l \in \mathbb{N}} \| \tilde{u}_k - \tilde{u}_l \|_{L^p(K)} \leq \delta \end{array} \right.$$

Natürlich hängt die Teilfolge sowohl von K als auch von δ ab.

Gemäß $\| J_\varepsilon(u) - u \|_{L^p(K)} \xrightarrow[\varepsilon \downarrow 0]{} 0$ glm. bzgl. $u \in A$ findet man zunächst $\varepsilon < \frac{1}{2} \operatorname{dist}(K, \partial\Omega)$ mit

$$\| J_\varepsilon(u_k) - u_k \|_{L^p(K)} < \delta/3$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Der Übergang zur Glättungsfolge $\{J_\varepsilon(u_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ hat den Grund, daß man aus $\{J_\varepsilon u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ direkt eine konvergente Teilfolge auswählen kann:

Es gilt nämlich nach der Hölder-Ungleichung

$$|\nabla J_\varepsilon u_k(x)| \leq \int |\nabla_x \{ j_\varepsilon(y-x) \}| \cdot |u_k(y)| \, dy \leq$$

$$c \cdot \| u_k \|_{L^p(K_\varepsilon)} ,$$

$$| J_\varepsilon u_k(x) | \leq \tilde{c} \cdot \| u_k \|_{L^p(K_\varepsilon)}$$

für alle $x \in K$, und da $\{u_k\}$ in $L^p_{loc}(\Omega)$ beschränkt ist, sieht man

$$\sup_k \left(\sup_K |J_\varepsilon u_k| + |\nabla J_\varepsilon u_k| \right) < \infty,$$

so daß es nach Arzela-Ascoli eine auf K gleichmäßig konvergente Teilfolge gibt, die natürlich auch $L^p(K)$ - konvergent ist. Sei $\tilde{u}_k$ die Teilfolge und

$$v := \lim_{k\to\infty} J_\varepsilon(\tilde{u}_k)$$

der $L^p(K)$ - Limes. Für $l, k \geq k_0$ folgt, wenn k_0 so gewählt wird, daß

$$\| J_\varepsilon \tilde{u}_k - v \|_{L^p(K)} \leq \delta/6 \qquad \forall k \geq k_0$$

ist :

$$\| \tilde{u}_l - \tilde{u}_k \|_{L^p(K)} \leq \| \tilde{u}_l - J_\varepsilon \tilde{u}_l \|_{L^p(K)} + \| J_\varepsilon \tilde{u}_l - v \|_{L^p(K)} + \| J_\varepsilon \tilde{u}_k - v \|_{L^p(K)}$$

$$+ \| J_\varepsilon \tilde{u}_k - \tilde{u}_k \|_{L^p(K)}$$

$$\leq 2 \cdot \delta/6 \quad + 2 \cdot \delta/3 \quad = \quad \delta$$

Streicht man also ggf. die ersten k_0 - Folgenglieder von $\{\tilde{u}_k\}$, so ist ** bewiesen.

Sei jetzt $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine kompakte Ausschöpfung von Ω, also $K_n \subset K_{n+1}$ und

$$\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$$

Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es gemäß (**) eine Teilfolge $\{u_{mn}\}_{m\in\mathbb{N}}$ von $\{u_n\}$ mit $\{u_{m\,n+1}\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \{u_{mn}\}_{m\in\mathbb{N}}$ und

$$\sup_{l,k\in\mathbb{N}} \| u_{ln} - u_{kn} \|_{L^p(K_n)} < 1/n ,$$

$\{v_n\}$ bezeichne die Diagonalfolge. Ist K dann kompakt in Ω, so findet man $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $K \subset K_k \quad \forall k \geq k_0$ und für $n, m \geq k_0$ ist

$$\| v_n - v_m \|_{L^p(K)} = \| u_{nn} - u_{mm} \|_{L^p(K)} \leq \quad (\text{wenn } m \leq n)$$

$$\| u_{nn} - u_{mm} \|_{L^p(K_m)} \leq \sup_{l,k} \| u_{ln} - u_{km} \|_{L^p(K_m)} \leq 1/m,$$

denn $\{u_{ln}\}_{l \in \mathbb{N}}$ ist ja für $n \geq m$ Teilfolge von $\{u_{km}\}_{k \in \mathbb{N}}$.

Nach dieser Abschätzung ist $\{v_n\}$ eine Cauchy-Folge in $L^p(K)$ für jedes Kompaktum $K \subset \Omega$, d.h. $\{v_n\}$ ist eine Teilfolge von $\{u_n\}$, die auf jedem Teilgebiet $\subset\subset \Omega$ in der L^p-Norm konvergiert.

ii) Zu $A \subset L^p(\Omega)$ definiert man $A_0 \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ als Menge der trivialen Fortsetzungen (durch 0) von $u \in A$ auf ganz $\mathbb{R}^n$. Es gilt:

$$A \text{ relativ kompakt in } L^p(\Omega) \iff A_0 \text{ relativ kompakt in } L^p(\mathbb{R}^n)$$

$$\iff A_0 \text{ relativ kompakt in } L^p_{loc}(\mathbb{R}^n),$$

wobei die Richtung „$\Longrightarrow$" der letzten Aequivalenz trivial ist, die andere Richtung dagegen die Beschränktheit von Ω erfordert: Ist nämlich $\{u_{n0}\}$ Folge in A_0, die eine Teilfolge hat, die auf jeder kompakten Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ in der $L^p(K)$-Norm konvergiert, so gilt dies speziell für $K = \overline{\Omega}$, und da alle beteiligten Funktionen außerhalb von Ω verschwinden, hat man $L^p(\mathbb{R}^n)$-Konvergenz der Teilfolge.

Nach i) ist die letzte Aussage gleichwertig mit

$$J_\varepsilon u_0 \xrightarrow[\varepsilon \downarrow 0]{} u_0 \quad \text{in } L^p(K) \text{ gleichmäßig bzgl. } u_0 \in A_0$$

für alle kompakten Mengen $K \subset \mathbb{R}^n$. Für $\varepsilon \le 1$ verschwindet $J_\varepsilon u_0$ außerhalb von Ω_1; $K := \overline{\Omega_1}$ ist kompakt, und die Spezialisierung der letzten Aussage impliziert schließlich die gewünschte gleichmäßige Konvergenz der Glättungsoperatoren auf $L^p(\mathbb{R}^n)$. ■

<u>Anmerkung:</u> Andere (aequivalente) Beschreibungen relativ kompakter Teilmengen A von $L^p(\Omega)$ findet man z.B. bei [Adams, 2.21 Theorem]:
Für $1 \le p < \infty$ gilt:
A ist genau dann relativ kompakt in $L^p(\Omega)$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Gebiet $G \subset\subset \Omega$ und ein $\delta > 0$ gibt wie folgt:

$$\left.\begin{array}{l} \int_\Omega |u_0(x+h) - u(x)|^p \, dx \le \varepsilon \\ \\ \int_{\Omega \setminus \overline{G}} |u|^p \, dx \qquad \le \varepsilon \end{array}\right\} \quad \text{für alle } |h| < \delta,\ u \in A.$$

Die zweite Bedingung sagt aus, daß die Mitglieder einer relativ kompakten Menge auf Randstreifen im L^p-Sinn gleichmäßig klein sein müssen.

<u>Jetzt zum Beweis des Einbettungssatzes:</u>

Sei u zunächst aus $C_0^1(\Omega)$, wir denken uns u durch 0 auf ganz $\mathbb{R}^n$ fortgesetzt. Für u_0 gilt

$$* \quad \| J_\varepsilon u_0 - u_0 \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le \varepsilon \cdot \| \nabla u_0 \|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

(wobei man genauso u statt u_0, Ω statt $\mathbb{R}^n$ schreiben kann, vorausgesetzt $\operatorname{spt} u \subset K \subset\subset \Omega$, $\varepsilon < \operatorname{dist}(K, \partial\Omega)$).

Es gilt

$$\| J_\varepsilon u_0 - u_0 \|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \varrho_\varepsilon (y-x)\ u_0(y)\ dy - u_0(x) \right|^p dx =$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \varrho_\varepsilon (y) \ \{ u_0 (y+x) - u_0(x) \}\ dy \right|^p dx .$$

Für $p > 1$ folgt mit $q := \frac{p}{p-1}$:

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} \varrho_\varepsilon (y) \ \{ u_0 (x+y) - u_0(x) \}\ dy \right|^p =$$

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} \{ u_0(x+y) - u_0(x) \}\ d\left(\mathcal{L}^n \llcorner \varrho_\varepsilon\right)(y) \right|^p \leq \text{(Hölder für das Maß } \mathcal{L}^n \llcorner \varrho_\varepsilon)$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u_0(x+y) - u_0(x)|^p\ d\left(\mathcal{L}^n \llcorner \varrho_\varepsilon\right)(y) \cdot \underbrace{\left(\mathcal{L}^n \llcorner \varrho_\varepsilon\right)(\mathbb{R}^n)^{p/q}}_{=1} =$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u_0(x+y) - u_0(x)|^p\ \varrho_\varepsilon(y)\ dy ,$$

was im Fall $p = 1$ trivial ist. Also:

$$\| J_\varepsilon u_0 - u_0 \|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |u_0(x+y) - u_0(x)|^p\ \varrho_\varepsilon(y)\ dy\ dx =$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_0^1 \frac{d}{dt}\ u_0(x+ty)\ dt \right|^p \varrho_\varepsilon(y)\ dy\ dx \leq$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left\{ \int_0^1 |y| \cdot |\nabla u_0|(x+ty)\ dt \right\}^p \varrho_\varepsilon(y)\ dy\ dx \leq \text{(Hölder)}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |y|^p \int_0^1 |\nabla u_0(x+ty)|^p\ dt\ \ \varrho_\varepsilon(y)\ dy\ dx \leq$$

$$\varepsilon^p \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^1 |\nabla u_0(x+ty)|^p\ dt\ \ \varrho_\varepsilon(y)\ dy\ dx ,$$

da die Funktion ϱ_ε ihren Träger in $B_\varepsilon(0) \subset \mathbb{R}^n$ hat.

Nun vertauscht man die Integrationsgrenzen und nutzt aus

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_0^1 |\nabla u_0 (x+ty)|^p \, dt \, dx =$$

$$\int_0^1 \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_0 (x+ty)|^p \, dx \right) dt = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_0|^p \, dz .$$

Das zusammen ergibt $*$ von vorhin.

$*$ überträgt sich auf Funktionen in $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega)$: Zu $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega)$ gibt es per Definition eine Folge $\{u_m\} \in C_0^\infty(\Omega)$ mit $\| u_m - u \|_{W^{1,p}(\Omega)} \longrightarrow 0$ bei $m \to \infty$, d.h.

$$\| J_\varepsilon (u_{m0}) - u_{m0} \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \varepsilon \cdot \| \nabla u_{m0} \|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

Für $m \geq m_\delta$ hat man

$$\| \nabla u_{m0} \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \| \nabla u_m \|_{L^p(\Omega)} \leq \delta + \| \nabla u \|_{L^p(\Omega)} .$$

Außerdem gilt:

$$\| J_\varepsilon(u_{m0}) - J_\varepsilon (u_0) \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \| u_{m0} - u_0 \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \xrightarrow[m \to \infty]{} 0 ,$$

d.h. wegen der Beliebigkeit von δ:

$$** \quad \| J_\varepsilon(u_0) - u_0 \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \varepsilon \cdot \| \nabla u \|_{L^p(\Omega)} , \quad u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega).$$

Schließlich sei $A \subset \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega)$ eine beschränkte Teilmenge. Dann ist A als Teilmenge von $L^p(\Omega)$ beschränkt, außerdem findet man ein $K > 0$

mit $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \leq K$ für alle $u \in A$. ** ergibt die Abschätzung

$$\| J_\varepsilon u_0 - u_0 \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq K \cdot \varepsilon,$$

und das ist offenbar die in ii) des vorigen Lemmas verlangte gleichmäßige Konvergenz der Glättungsoperatoren auf A. ■

Bemerkung: 1) Der Satz von Rellich-Kondraschov ist völlig analog zur klassischen Aussage des Satzes von Arzela-Ascoli: hat man nämlich z.B. eine in $C^1(\Omega)$ beschränkte Folge, so ist diese in $C^0(\Omega)$ relativ kompakt. In unserem Fall hat man die Information, daß Integralnormen von verallgemeinerten Ableitungen beschränkt bleiben – dies genügt, um relative Kompaktheit der Folge im zugehörigen Lebesgue-Raum zu schließen.

2) Man kann den Satz von Rellich auch dazu benutzen, für Spezialfälle einen kurzen Beweis der sog.

Poincaré-Ungleichung: Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $1 \leq p < \infty$, so gibt es eine Konstante $c = c(n,p,\Omega)$ mit

$$\boxed{\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq c \cdot \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}}$$

für alle $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega)$.

zu erbringen. Angenommen die Abschätzung ist falsch. Dann existiert eine Folge $\{u_k\} \subset \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega)$ mit

$$\|u_k\|_{L^p(\Omega)} > k \cdot \|\nabla u_k\|_{L^p(\Omega)}$$

Die Folge $v_k := u_k / \|u_k\|_{L^p(\Omega)}$ gehört ebenfalls zu $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega)$

mit $\|v_k\|_{L^p(\Omega)} = 1$, $\|\nabla v_k\|_{L^p(\Omega)} \leq k^{-1}$,

so daß es nach Rellich eine Teilfolge $\{\tilde{v}_k\}$ gibt sowie $v \in L^p(\Omega)$ mit $\|\tilde{v}_k - v\|_{L^p(\Omega)} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$. Für jede Testfunktion φ ist dann

$$\begin{array}{ccc} \displaystyle\int_\Omega D_\alpha \varphi \cdot v_k \, dx & = & \displaystyle -\int_\Omega \varphi \cdot D_\alpha v_k \, dx \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \\ \downarrow k\to\infty & & \\ \displaystyle\int_\Omega D_\alpha \varphi \cdot v \, dx, & & \end{array}$$

m. a. W.:

$v \in W^{1,p}(\Omega)$ mit $v_k \longrightarrow v$ in $W^{1,p}(\Omega)$.

(bemerke: das gerade vorgeführte Argument wiederholt die Tatsache, daß $W^{1,p}(\Omega)$ abgeschlossener Teilraum von $L^p(\Omega, \mathbb{R}^{1+n})$, $u \to (u, \nabla u)$, ist.)

Wie wir im nächsten Paragraphen sehen werden (das folgt trivial durch Glätten), bedeutet $\nabla v = 0$ aber $v \equiv$ const auf $\Omega^{(*)}$. Dies widerspricht nun der Eigenschaft $v \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega)$ (da v starker Limes von $\tilde{v}_k \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega)$ und $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega)$ abgeschlossen in $W^{1,p}(\Omega)$) abgesehen vom Fall $v = 0$ (was durch die Normierung $\|\tilde{v}_k\|_{L^p(\Omega)} = 1$ ausgeschlossen ist):

$v \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega)$ heißt, daß es $\varphi_m \in C_0^\infty(\Omega)$ gibt, die v in der $W^{1,p}(\Omega)$-Norm approximieren. Natürlich ist die Folge $\{\varphi_m\}$ auch im Banachraum $W^{1,p}(D)$ beschränkt, wenn D ein beschränktes Gebiet ist, welches Ω kompakt enthält. Wir haben dann:

*: Hier ist Ω natürlich zusammenhängend, sonst folgt aus $\nabla v \equiv 0$ lediglich die Konstanz von v auf jeder Komponente von Ω.

$$\| \nabla \mathcal{Y}_m \|_{L^p(D)} \xrightarrow[m \to \infty]{} 0 \quad , \quad \| \mathcal{Y}_m \|_{L^p(D)} = \| \mathcal{Y}_m \|_{L^p(\Omega)} \longrightarrow \mathcal{L}^n(\Omega)^{1/p} \cdot |v| ,$$

so daß nach Rellich $\tilde{\mathcal{Y}}_m \longrightarrow \mathcal{Y}$ in $L^p(D)$ für ein Element aus diesem Raum gilt, wenn man zu einer Teilfolge $\{\tilde{\mathcal{Y}}_m\}$ übergeht, die man auch noch so wählen kann, daß $\tilde{\mathcal{Y}}_m(x) \longrightarrow \mathcal{Y}(x)$ f.ü. auf D gilt.
Wie oben zeigt man $\mathcal{Y} \in W^{1,p}(D)$.
Offenbar ist aber

$$\mathcal{Y}(x) = \begin{cases} v & \text{auf } \Omega \\ 0 & \text{auf } D \setminus \Omega , \end{cases}$$

und diese Funktion ist offenbar nicht schwach differenzierbar. Alternativ folgt aus $\nabla \tilde{\mathcal{Y}}_m \longrightarrow 0$ in $L^p(D)$ die $W^{1,p}(D)$-Konvergenz $\tilde{\mathcal{Y}}_m \longrightarrow \mathcal{Y}$ und letztlich $\nabla \mathcal{Y} = 0$, $\mathcal{Y}$ ist nicht konstant auf D.
("es müßte doch ein triviales Argument geben, was $c \neq 0 \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega)$ ausschließt")
Damit ist die Poincaré Ungleichung bewiesen, später werden wir einen direkten Beweis kennenlernen, der auch eine explizite Kontrolle der Konstanten $c(n,p,\Omega)$ gestattet. ∎

Mit dem bisher zusammengestellten Material läßt sich das

<u>Dirichlet-Problem</u>:
$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{auf } \Omega \\ u = u_0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

geeignet interpretieren und auch im Sobolev-Raum lösen: seien dazu $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, $u_0 \in W^{1,2}(\Omega)$ und $f \in L^2(\Omega)$ beliebig vorgegeben. Die Randbedingung wird so interpretiert, daß $u - u_0 \in \overset{\circ}{W}{}^{1,2}(\Omega)$ gelten soll. Schreibt man also $w := u - u_0$, so löst w formal $-\Delta w = f + \operatorname{div}(\nabla u_0)$

und durch Multiplikation mit $\varphi \in C_0^1(\Omega)$ sowie partieller Integration lautet die entsprechende schwache Form des Dirichlet-Problems: finde $w \in \overset{0}{W}{}^{1,2}(\Omega)$ mit

$$(1) \quad \int_\Omega \nabla w \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega f \cdot \varphi - \nabla u_0 \cdot \nabla \varphi \, dx =: L(\varphi)$$

für alle $\varphi \in C_0^1(\Omega)$ und dann natürlich auch für alle $\varphi \in \overset{0}{W}{}^{1,2}(\Omega)$.
Nach der Poincaré Ungleichung induziert das Skalarprodukt

$$\langle \varphi, \psi \rangle := \int_\Omega \nabla \varphi \cdot \nabla \psi \, dx$$

auf $\overset{0}{W}{}^{1,2}(\Omega)$ eine zur ursprünglichen Norm aequivalente Norm, so daß man (1) auch schreiben kann als

$$\langle w, \cdot \rangle = L$$

auf $\overset{0}{W}{}^{1,2}(\Omega)$, und gemäß $L \in \overset{0}{W}{}^{1,2}(\Omega)^*$ liefert der Satz von Riesz sofort eine eindeutige Lösung $w \in \overset{0}{W}{}^{1,2}(\Omega)$. $w + u_0 \in W^{1,2}(\Omega)$ ist verallgemeinerte Lösung des Ausgangsproblems. Wir werden in einem späteren Kapitel sehen, daß u unter geeigneten Voraussetzungen an u_0 und f tatsächlich klassische Lösung des Ausgangsproblems ist.

Wir bemerken, daß sich das Hilbertraumargument auch dann anwenden läßt, wenn man statt Δ allgemeine elliptische Operatoren

$$-\sum_{i,j=1}^n \partial_i \left(a_{ij}(x) \cdot \partial_j \right)$$

zuläßt mit Koeffizienten $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$, die der Elliptizitätsbedingung

$$\forall x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n: \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\, \xi_i \xi_j \geq \lambda |\xi|^2$$

mit $\lambda > 0$ genügen.